Optimierungsprobleme

Sei $f : M \to \mathbb{R}$. Ein Optimierungsproblem ist:

$$(P)\ \min_{x\in M} f(x)$$

(P) ist *zulässig*, wenn $M \neq \emptyset$.
$x \in M$ ist zulässiger Punkt.
$\exists \hat{x} \in M \forall x \in M : f(\hat{x}) \le f(x)$, so ist (P) lösbar.
Die Menge der Lösungen von (P) ist:

$$\operatorname{argmin}_{x\in M} f = \{\hat{x} \in M | \forall x \in M : f(\hat{x}) \le f(x)\}$$

Klassifizierung

(a) Endlich dim. Probleme mit $M \subseteq \mathbb{R}^m$
(b) Lineare Probleme (vgl. LP)
(c) Konvexe Probleme
(d) Differenzierbare Probleme

Lineare Programme

$(P)\ \min_{x\in M} f(x)$ ist linear, wenn:
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin linear ist mit $f(x) = c^\top x + c_0$ für $c \in \mathbb{R}^n, c_0 \in \mathbb{R}$ und M folgende Darstellung besitzt:
$M = \{x \in \mathbb{R}^n | A_g x = b_g, A_u x \le b_u\}$ mit
$A = (A_g\ A_n)^\top \in \mathbb{R}^{(m+p)\times n}, b = (b_g\ b_u)^\top \in \mathbb{R}^{m+p}$

Normalform

Ein LP (P_N) ist in Normalform gegeben, wenn $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ ex. s.d. gilt:

$$(P_N)\ \min c^\top x \text{ mit } M_N = \{x \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} | Ax = b\}$$

Jedes LP (P) besitzt Normalform (P_N).
Dafür werden Ungleichungsbedingungen über *Schlupfvariablen* umgeformt:

$$A_u x \le b_u \rightsquigarrow x_i^s = (b_u)_i - (A_u x)_i \text{ für } i = 1,\dots,s$$

Konvexe Mengen

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *konvex*, wenn für $x, y \in U \wedge \lambda \in [0,1]$: $(1-\lambda)x + \lambda y \in U$ gilt.

$v = \sum_{j=1}^m \lambda_j v^{(j)}$ mit $\lambda_j \in [0,1] \wedge \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ heißt *Konvexkombination* von $v^{(1)},\dots,v^{(m)}$.

(M_N) der Normalform ist konvex.

Schnitte endlich vieler Halbräume in R^n heißen *Polyeder*, beschränkte Polyeder heißen *Polytope*.

M_n ist Polytop gdw. $\nexists y \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} \setminus \{0\} : Ay = 0$.

Charakterisierung von Ecken in M_N

$x \in M$ ist Ecke, wenn aus $x = (1-\lambda)u + \lambda v$ mit $u, v \in M, \lambda \in (0,1)$ folgt: $u = v = x$.
Ecke ist nicht als echte Konvexkomb. darstellbar.

$x \in M_N$ ist Ecke von M_N gdw. die Spalten $\{a_{*j}\}_{j\in J_x}$ mit $J_x = \{j \in \{1,\dots,n\} | x_j > 0\}$ linear unabhg. sind.

Satz zur Existenz endl. vieler Ecken in M_N

$$M_N \neq \emptyset \implies \exists x \in M_N : x \text{ ist Ecke}$$

Insgesamt existieren endlich viele Ecken.

Konvexkombination von Ecken

Seien $v^{(k)} \in M_N$ mit $k = 1,\dots,K$ Ecken von M_N.
Dann $\forall x \in M_N \exists \alpha_j \in [0,1], y \in \{y \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} | Ay = 0\}$:

$$\textstyle\sum_{j=1}^K \alpha_j = 1 \wedge x = \sum_{j=1}^K \alpha_j v^{(j)} + y$$

Existenz von linearen Programmen

Sei $(P_N)\ \min c^\top x$ auf $M_N = \{x \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} | Ax = b\} \neq \emptyset$.
Dann gilt entweder $\inf(P_N) = -\infty$ oder (P_N) ist mit einer Ecke von M_N lösbar.

Simplex-Algorithmus

Basislösung

$x \in \mathbb{R}^n$ ist Basislösung zu $A_N x = b_N$, wenn es m-elementige Indexmenge J_x gibt mit linear unabhg. $\{a_{*j} | j \in J_x\}$ und $\forall j \notin J_x : x_j = 0$.

$x \in M_N$ Basislösung $\iff$ x ist Ecke von M_N

Phase I

Bestimme Basislösung $z \in M_N$ und äquivalente Darstellung (P) zu (P_N):

$$(P)\ \min c^\top x \text{ auf } M = \{x \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} | Ax = b\}$$

Mit Bedingungen:

(E1) $a_{*j} = e_{\ell_j}$ für $j \in J_z$
(E2) $c_j = 0$ für $j \in J_z$
(E3) $b \ge 0$
(E4) $c^\top x = c_N^\top x - c_N^\top z$ d.h. $c^\top z = 0$

Phase II

Seien z, A, b, c aus Phase I gegeben.
Iterativ werden nun neue Basislösungen $\tilde{z}$ und Darstellungen $\tilde{A}x = \tilde{b}$ mit Bedingungen (E1)-(E4) bestimmt s.d.: $c^\top \tilde{z} \le c^\top z = 0$
Diese Iteration bricht ab, wenn $\tilde{z}$ Lösung zu (P_N) ist oder $\inf(P_N) = -\infty$ gilt.

Algorithmus zu Phase II

(1) $c \ge 0$? $\rightsquigarrow$ Abbruch denn z ist Lösung zu (P) mit $c^\top z = \eta - c_N^\top z = 0$
(2) Wähle Pivotindex $s \in \{1,\dots,n\}$ mit $c_s < 0$
(3) $a_{*s} \le 0$? $\rightsquigarrow$ Abbruch mit $\inf(P) = -\infty$
(4) Wähle $r \in \{1,\dots,m\}$ s.d. Pivotelement a_{rs} mit $\frac{b_r}{a_{rs}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{is}} \middle| i \in \{1,\dots,n\} \text{ mit } a_{is} > 0\right\}$ die Bedingung $a_{rs} > 0$ erfüllt
(5) Gauß-Transformation zu $\tilde{A}x = \tilde{b}$ s.d. r-ter Einheitsvektor in $\tilde{A}$ in der s-ten Spalte steht
(6) Ersetze (P) mit $(\tilde{P})$ und wiederhole ab (1)

Durchführbarkeit des Simplex-Verfahren

Sei (P) mit A, b, c und Basislsg. $z \in M$ aus Phase I und $(\tilde{P})$ durch Phase II Schritt erzeugt. Dann:

(a) $c \ge 0 \implies z$ ist optimal
(b) $c_s < 0 \wedge a_{*s} \le 0 \implies \inf(P) = -\infty$
(c) (P) und $(\tilde{P})$ sind äquiv. mit $\tilde{c}^\top x = c^\top x - c^\top \tilde{z}$ für $x \in M$
(d) $c^\top \tilde{z} \le c^\top z = 0$
(e) $(\tilde{P})$ mit Basislösung $\tilde{z}$ erfüllt (E1)-(E4)

Bestimmung von Basislösung in Phase I

Definiere Hilfsproblem $(H)\ \min e^\top(b - Ax)$ auf $M_H = \{x \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} | A_N x \le b_N\}$ wobei $e = 1 \in \mathbb{R}^n$.
Für das Hilfsproblem (H) gelten:

(a) wg. $b_N \ge 0 \implies 0 \in M_H$ ist (H) zulässig
(b) $x \in M_H \implies e^\top(b_N - A_N x) \ge 0$
d.h. (H) hat immer Lösung, $\inf(H) > -\infty$
(c) Mit Schlupfvariablen lässt sich Phase II auf (H) direkt anwenden

Ist $\hat{z} \in M_H$ optimale Basislösung zu (H) so gelten:

(a) $e^\top(b_N - A_N \hat{z}) = 0 \implies \hat{z}$ ist zulässig zu (P_N)
(b) $e^\top(b_N - A_N x) \ge e^\top(b_N - A_N \hat{z}) > 0$
$\implies M_N \neq \emptyset$ und (P_N) ist nicht zulässig

Entartete Basislösungen

Sei $z \in M$ eine Basislösung.
$z \in M$ ist *nicht entartet*, wenn $z_j > 0$ für $j \in J_z$ gilt.

Im Simplex-Tableau ist z nicht entartet gdw. $b_i > 0$ für $i = 1,\dots,m$ gilt.
Für entartete $z \in M$ ist das Simplex-Verfahren i.A. nicht zyklenfrei.

Regel von Bland

Sei $s := \min\{j \in \{1,\dots,n\} | c_j < 0\}$ die Pivotspalte und r die Pivotzeile s.d. gilt:

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{is}} \middle| a_{is} > 0 \text{ für } i = 1,\dots,m\right\}$$

Wird das Minimum für mehrere Zeilen angenommen, so wähle die Pivotzeile r s.d. $j_r < j_k$ gilt. d.h. der r-te Einheitsvektor steht am weitestens links.

Phase II mit Regel von Bland stoppt immer im Optimum zu (P) insofern ein solches existiert.

Dualitätstheorie

Sei $(P_N)\ \min_{x\in M} c^\top x$ auf $M = \{x \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} | Ax = b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt für Lösung $\hat{x} \in M$ von (P_N):

$$\exists \hat{y} \in N = \{y \in \mathbb{R}^m | A^\top y \le c\} \text{ mit } b^\top \hat{y} = c^\top \hat{x}$$

Duales Optimierungsproblem

Zu *primalem* LP in Normalform (P_N) ist das duale Optimierungsproblem (D) gegeben durch:

$$(D)\ \max_{y\in N} b^\top y \text{ auf } N = \{y \in \mathbb{R}^m | A^\top y \le c\}$$

Schwacher Dualitätssatz

Für zulässige (P_N) und (D) gelten:

(a) $\forall x \in M, y \in N : b^\top y \le c^\top x$
(b) (P_N) und (D) sind lösbar
(c) $\hat{x} \in M \wedge \hat{y} \in N \wedge b^\top \hat{y} = c^\top \hat{x}$
$\implies \hat{x}$ löst (P_N) und $\hat{y}$ löst (D)

Satz von Kuhn-Tucker

$$\hat{x} \in M \text{ löst } (P_N) \iff \exists \hat{y} \in N : b^\top \hat{y} = c^\top \hat{x}$$

Starker Dualitätssatz

Für (P_N) und duales (D) gelten:

(a) $(P_N), (D)$ zulässig $\implies (P_N), (D)$ lösbar und

$$\min(P_N) = \max(D)$$

(b) (P_N) zulässig, (D) nicht $\implies \inf(P) = -\infty$
(c) (D) zulässig, (P_N) nicht $\implies \sup(D) = \infty$

Komplementaritäts-Bedingung

$\hat{x} \in M, \hat{y} \in N$ sind optimal zu (P_N) bzw. (D) gdw.:

$$\hat{x}^\top(c - A^\top \hat{y}) = 0$$

d.h. $\forall j = 1,\dots,n : \hat{x}_j = 0 \vee c_j = (A^\top \hat{y})_j$

Farkas-Lemma

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann:

$$\begin{aligned} &\exists x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} && : Ax = b \\ \iff &\nexists y \in \mathbb{R}^m && : A^\top y \leq 0 \wedge b^\top y > 0 \end{aligned}$$

Konvexe Optimierung

Die *konvexe Hülle* von $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert als:

$$\operatorname{conv}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x^{(i)} \middle| x^{(i)} \in M, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *Kegel*, wenn $x \in M \wedge \lambda \geq 0 \implies \lambda x \in M$.
Die *konvexe Kegelhülle* von $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist def. als:

$$\operatorname{cone}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x^{(i)} \middle| x^{(i)} \in M, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

$$M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist konvex} \iff \sum_{i=1}^m \lambda_i x^{(i)} \in M$$

Projektionssatz

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abg. und konvex. Dann:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \exists! \hat{x} \in M \forall y \in M : \|\hat{x} - x\| \leq \|y - x\|$$

Ein $\hat{x} \in M$ ist dieser *Projektionspunkt* gdw.:

$$\forall y \in M : (x - \hat{x})^\top (y - \hat{x}) \leq 0$$

Trennungssatz

Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abg. und konvex sowie $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$. Dann ex. x und M strikt trennende Hyperebene:

$$\exists a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \gamma \in \mathbb{R} \forall y \in M : a^\top y \leq \gamma < a^\top x$$

Ist M Kegel, so kann $\gamma = 0$ gesetzt werden.

Satz von Caratheodory

$M \subseteq \mathbb{R}^n \wedge x \in \operatorname{cone}(M) \setminus \{0\}$
$\implies \exists m \leq n$ linear unabhg. $v^{(j)} \in M$ und $\lambda_j \geq 0$:
$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j v^{(j)}$

$M \subseteq \mathbb{R}^n \wedge x \in \operatorname{conv}(M)$
$\implies \exists m \leq n+1$ $v^{(j)} \in M$ s.d.
$\{v^{(2)} - v^{(1)}, \ldots, v^{(m)} - v^{(1)}\}$ linear unabhg. und
$\lambda_j \in [0,1]$ mit $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j v^{(j)} \wedge \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$

Simplex

Die konvexe Hülle $S = \operatorname{conv}\{v^{(j)} | j = 1,\ldots,m\}$ ist ein *Simplex*, wenn $\{v^{(2)} - v^{(1)}, \ldots, v^{(m)} - v^{(1)}\}$ linear unabhängig sind. Ein *simplizialer Kegel* ist die konvexe Kegelhülle linear unabhg. Vektoren.

Konvexe Funktionen

Sei $M \subseteq R^n$ konvex und $f : M \to \mathbb{R}$.

f ist *konvex*, wenn: $\forall x, y \in M, \lambda \in [0,1]$:
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

f ist *strikt konvex*, wenn: $\forall x \neq y \in M, \lambda \in (0,1)$:
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

f ist *glm. konvex*, wenn $\exists k > 0 \forall x, y \in M, \lambda \in [0,1]$:
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) + k\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$
$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
Glm. konvexe Funktionen sind strikt konvex.

Der *Epigraph* von $f : M \to \mathbb{R}$ ist definiert als:

$$E(f) = \{(x, \alpha) \in M \times \mathbb{R} | f(x) \leq \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

f ist (strikt) konvex gdw. $E(f)$ (strikt) konvex ist.

Jensensche Ungleichung

Für Konvexkombination $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v^i$ von $v^i \in M$ mit $\lambda_i \in [0,1]$ und $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ zusammen mit konvexer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(v^i)$$

Stetigkeitskriterium

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ konvex, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Dann ist f stetig.

Konvexheitskriterien

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex sowie $f \in C^2(M, \mathbb{R})$. Gleichmäßige Konvexität von f ist äquivalent zu:

(a) $\exists c > 0 \forall x, y \in M$:
$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)(y-x) + c\|y-x\|^2$
(b) $\exists c > 0 \forall x, y \in M$:
$(\nabla f(y) - \nabla f(x))^\top (y-x) \geq c\|y-x\|^2$
(c) $\exists c > 0 \forall x \in M, z \in \mathbb{R}^n : z^\top \nabla^2 f(x) z \geq c\|z\|^2$

Strikte Konvexität von f ist äquivalent zu:

(a) $\forall x, y \in M : f(y) - f(x) > \nabla f(x)(y-x)$
(b) $\forall x, y \in M : (\nabla f(y) - \nabla f(x))^\top (y-x) > 0$
(c) $\forall x \in M, z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : z^\top \nabla^2 f(x) z > 0$

Konvexität von f ist äquivalent zu:

(a) $\forall x, y \in M : f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)(y-x)$
(b) $\forall x, y \in M : (\nabla f(y) - \nabla f(x))^\top (y-x) \geq 0$
(c) $\forall x \in M, z \in \mathbb{R}^n : z^\top \nabla^2 f(x) z \geq 0$

Konvexe Optimierungsaufgaben

Problem (P) $\min_{x \in M} f(x)$ auf $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *konvex*, wenn M und f konvex sind.

Hier sind lokale Minima auch globale Minima.

Eindeutigkeit

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : M \to \mathbb{R}$ strikt konvex. Dann hat (P) höchstens eine Lösung.

Sei M nichtleer, abg. und konvex sowie f glm. konvex und stg. Dann hat (P) genau eine Lösung.

Konvexes Optimierungsproblem

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und M gegeben als:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) \leq 0 \wedge Ax = b\}$$

für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und konvexe $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Dann ist (P) ein *konvexes Optimierungsproblem*.

$\Lambda = \{(f(x) + r, h(x) + z, Ax - b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$
$| r, z \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$
Λ ist konvexe Menge zu gegebenem (P).

Existenz von Lösung

Sei $M \neq \emptyset$, $\inf(P) > -\infty$ und Λ abgeschlossen.
Dann besitzt konvexes (P) eine Lösung.

Satz von Weyl

Alle endlich erzeugten konvexen Kegel $K \in \mathbb{R}^n$ sind polyedral und besitzen Darstellung:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n | Bx \leq 0\} \text{ mit } B \in \mathbb{R}^{q\times n}$$

Dualität konvexer Probleme

Konvexes (P) mit Λ hat äquivalentes Problem (P')

(P') $\min \gamma$ mit $(\gamma, u, v) \in \Lambda \cap (\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^{1+p+m}$

Lagrange Funktion

$$L(x, u, v) = f(x) + u^\top h(x) + v^\top (Ax - b)$$

Duales Problem

Sei $F : \mathbb{R}^p_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \inf_{x \in \mathbb{R}} L(x, u, v)$

$$(D) \max_{(u,v) \in N} F(u, v) \text{ auf } N$$

Wobei $N = \{(u, v) \in \mathbb{R}^p_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m | F(u, v) > -\infty\}$

Schwacher Dualitätssatz

Seien konvexe (P) und (D) gegeben. Dann:

$$\forall x \in M, (u, v) \in N : f(x) \geq F(u, v)$$

Sei $\hat{x} \in M, (\hat{u}, \hat{v}) \in N$ s.d. $f(\hat{x}) = F(\hat{u}, \hat{v})$ dann löst $\hat{x}$ (P) und $(\hat{u}, \hat{v})$ ist Maximalstelle von (D).

Sattelpunktsatz

Sei (P) konvexes Problem mit dualem (D).
$\hat{x} \in M, (\hat{u}, \hat{v}) \in N$ sind optimal zu (P) bzw. (D) mit $f(\hat{x}) = F(\hat{u}, \hat{v})$ gdw. $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) \in M \times N$ Sattelpunkt der Lagrange-Funktion ist.
d.h: $\forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p_{\geq 0}, v \in \mathbb{R}^m$:

$$L(\hat{x}, u, v) \leq L(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) \leq L(x, \hat{u}, \hat{v})$$

Slater-Bedingung

Zulässige Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) \leq 0, Ax = b\}$ erfüllt *Slater-Bedingung (SB)*, wenn:

(i) $\operatorname{Rg}(A) = m \leq n$ maximal
(ii) $\tilde{x} \in M$ ex. mit $h(\tilde{x}) < 0$

Starker Dualitätssatz

Sei (P) konvexes Problem mit dualem (D) und M erfülle (SB). Ist (P) lösbar mit $\hat{x} \in M$ dann:

$$\exists \text{Lösung } (\hat{u}, \hat{v}) \in N \text{ von } (D) : f(\hat{x}) = F(\hat{u}, \hat{v})$$

Konvexer Kuhn-Tucker

Sei (P) konvexes Problem mit dualem (D) und M erfülle (SB). $\hat{x} \in M$ ist Lösung von (P) gdw. $\exists (\hat{u}, \hat{v}) \in N : f(\hat{x}) = F(\hat{u}, \hat{v})$

Komplementaritäts-Bedingung

Für $\hat{x}, (\hat{u}, \hat{v})$ des konvexen Kuhn-Tucker gilt die *Komplementaritätsbedingung*: $\hat{u}^\top h(\hat{x}) = 0$

Differenzierbare Optimierung

(P) $\min f$ auf $M = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) \leq 0, g(x) = 0\}$
$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Lagrangesche Multiplikatorenregel

Ziel: Linearisierung und Anw. von Kuhn-Tucker.
Mit $(\nabla f(x))^\top = f'(x) \in \mathbb{R}^{1\times n}, f'(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $h'(x) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sind Linearisierungen gegeben:

$$\begin{aligned} f(x+z) &= f(x) + f'(x)z + o(\|z\|) \\ g(x+z) &= g(x) + g'(x)z + o(\|z\|) \\ h(x+z) &= h(x) + h'(x)z + o(\|z\|) \end{aligned}$$

Linearisierung von (P):

$$(LP)\ \min f'(x)z$$

auf $M_L = \{z \in \mathbb{R}^n | h(x) + h'(x)z \leq 0, g'(x)z = 0\}$

Zulässige Abstiegsrichtung

Sei $M \in \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ dann ist $z \in \mathbb{R}^n$ *zulässige Abstiegsrichtung* zu f in $x \in M$, wenn $\exists \epsilon > 0 \forall t \in (0, \epsilon) : x + tz \in M \wedge f(x + tz) < f(x)$.

Kegel

Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) \leq 0\}$ mit $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.
$T(x, M) := \{z \in \mathbb{R}^n | \exists t_k \geq 0, z^{(k)} \in \mathbb{R}^n : t_k \to 0, z^{(k)} \to z\ (k \to \infty), \forall k \in \mathbb{N} : x + t_k z^{(k)} \in M\}$