

## Existenzsatz von Peano

Sei  $f : G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stg.,  $G$  Gebiet.  
Dann  $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in G \exists$  Lösung  $y' = f(x, y)$  im Gebiet.

## Existenz- und Eindeutigkeit

Sei  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  stg. auf Steifen  $S := [a, b] \times \mathbb{R}^n$  und  $f$  erfülle die Lipschitz-Bedingung:

$$\|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\|, L > 0$$

Dann existiert für das AWP genau eine Lösung in  $C([a, b], \mathbb{R}^n)$  für jedes Element in  $S$ .

## Einzelschrittverfahren

Sei  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$  AWP.  
Ein *Einschrittverfahren* ist Vorschrift:

$$\eta_0 = y_0, \eta_{k+1} = \eta_k + h \cdot \Phi(x_k, \eta_k, h), x_{k+1} = x_k + h$$

Für *Verfahrensfunktion*  $\Phi : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Die *Näherungslösung*  $\eta_k$  ist eine *Gitterfunktion*.

$$\eta_k : \{x \in [x_0, b] | x = x_0 + i \cdot h, i \in \mathbb{N}_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

## Explizites Eulerverfahren

$$\Phi(x, y, h) := f(x, y) \text{ d.h. Butcher-Schema: } \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

## Implizites Eulerverfahren

$$\Phi(x, y, h) := f(x + h, g(x, y, h)), g = y + h \cdot f(x + h, g)$$

$$\text{Mit Butcher-Schema: } \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

## Konsistenz

Sei  $z$  mit  $z'(x) = f(x, z(x))$  die exakte AWP Lösung.  
Der *lokale Diskretisierungsfehler* in  $(x, y)$ :

$$\tau(x, y, h) := \frac{z(x+h) - y}{h} - \Phi(x, y, h)$$

Ein ESV ist brauchbar, wenn  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(x, y, h) = 0$   
bzw.  $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(x, y, h) = f(x, y)$ .

## Konsistenzordnung

ESV mit  $\Phi$  ist *konsistent mit Ordnung*  $p$ , falls:

$$\tau(x, y, h) \in \mathcal{O}(h^p) \text{ für } h \rightarrow 0$$

Hierzu ist eine Taylorentwicklung von  $z$  hilfreich.  
Beide Eulerverfahren haben Ordnung 1.

## Allgemeiner Ansatz für Ordnung 2

$$\Phi(x, y, h) := a_1 \cdot f(x, y) + a_2 \cdot f(x + p_1 h, y + p_2 h \cdot f(x, y))$$

für Konstanten  $a_1, a_2, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Bedingungen: } a_1 + a_2 = 1, a_2 p_1 = \frac{1}{2}, a_2 p_2 = \frac{1}{2}$$

## Verfahren von Heun

$$\Phi(x, y, h) := \frac{1}{2}(f(x, y) + f(x + h, y + h \cdot f(x, y)))$$

## Verfahren von Runge

$$\Phi(x, y, h) := f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y))$$

## Implizite Trapezregel

$$\Phi(x, y, h) := \frac{1}{2}(f(x, y) + f(x + h, g(x, y, h)))$$

$$g(x, y, h) := y + \frac{h}{2}(f(x, y) + f(x + h, g(x, y, h)))$$

## Konvergenz

Der *globale Diskretisierungsfehler* für  $x \in [a, b]$ :

$$e(x, h_n) := \eta(x, h_n) - y(x), h_n = h_n(x) = \frac{x - x_0}{n}, n \in \mathbb{N}_0$$

Ein ESV ist *konvergent*, falls:

$$\forall x \in [a, b], \text{ hinr. glatte } f : \lim_{n \rightarrow \infty} e(x, h_n) = 0$$

## Autonomisierung

$$\eta := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \widehat{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \eta \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

AWP  $\eta' = \widehat{f}(\eta)$  mit Bedingung:  $\eta(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

## Invarianz gegen Autonomisierung

ESV  $\Phi$  ist *invariant gegen Autonomisierung*, wenn:

$$\widehat{\Phi}_1(\eta, h) = 1, \Phi(x, y, h) = \widehat{\Phi}_2(\eta, h), \eta = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wobei  $\widehat{\Phi} = (\widehat{\Phi}_1, \widehat{\Phi}_2)$  die Anwendung von  $\Phi$  auf das autonomisierte System ist.

## Explizite Runge-Kutta-Verfahren

Verfahrensfunktion  $\Phi$  eines  $s$ -stufigen RKV:

$$\Phi(x, y, h) := b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_s k_s$$

$$k_i := f(x + c_i h, y + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} k_j)$$

## Butcher-Schema

Darstellung der Koeffizienten  $b_i, c_i$  und  $a_{i,j}$ :

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Hierbei ist  $A$  strikte untere Dreiecksmatrix.

## Konsistenzbedingung für Ordnung 1

Konsistent mit Ordnung 1 gdw.  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$

Für die Ordnung  $p$  eines  $s$ -stufigen RKV:  $p \leq s$

## Invarianzbedingung

RKV ist invariant gegen Autonomisierung gdw. es konsistent und  $c_i$  die  $i$ -te Zeilensumme von  $A$  ist:

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1 \text{ und } \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} = c_i \text{ für } i = 1, \dots, s$$

Somit genügt  $(b, A)$  zur Definition von gegenüber Autonomisierung invarianter RKV.

## Konsistenzbedingung für Ordnung 2

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1, \sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}$$

## Konsistenzbedingung für Ordnung 3

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1, \sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}, \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3}, \sum_{i,j=1}^s b_i a_{i,j} c_j = \frac{1}{6}$$

## Explizite Extrapolationsverfahren

Numerische Lösung eines AWP in  $k+1$  Gittern:

$$\begin{array}{c|ccc} h & h_1 & \dots & h_{k+1} \\ \hline \eta(x, h) & \eta(x, h_1) & \dots & \eta(x, h_{k+1}) \end{array}$$

Interpolation mit Polynom  $\chi$ :

$$\chi(h_i) = \eta(x, h_i) \text{ für } i = 1, \dots, k+1$$

Auswertung von  $\chi$  in 0:

$$\chi(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \chi(h) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \eta(x, h) = y(x)$$

## Schrittweitensteuerung

$h_i = x_{i+1} - x_i$  soll groß genug sein, den Aufwand für die Lösung klein zu halten und gleichzeitig klein genug um Genauigkeit zu garantieren.

Der globale Diskretisierungsfehler  $e(x_{i+1}, h_i)$  wird durch  $[e_{i+1}] = \widehat{\eta}_{i+1} - \eta_{i+1}$  geschätzt.

$\widehat{\eta}$  soll dazu von höherer Ordnung als  $\eta$  sein.

$h_i$  wird akzeptiert, wenn  $\|[e_{i+1}]\| \leq \text{tol}$  für  $\text{tol} > 0$ .

$$[e_{i+1}] = \widehat{\eta}_{i+1} - \eta_{i+1} = h_i(\widehat{\tau}_i - \tau_i)$$

Differenz lokaler Fehler schätzt globalen Fehler.

## Adaptiver Algorithmus

Während  $x_i < b$  setze  $x := x_i + h_i$  und:

$$y := \eta_i + h_i \Phi(x_i, \eta_i, h_i)$$

$$\widehat{y} := \eta_i + h_i \widehat{\Phi}(x_i, \eta_i, h_i)$$

$$[e] := |y - \widehat{y}|$$

$$h := \min \left\{ rh, h_{\max}, \rho h_i^{p+1} \sqrt{\frac{\text{tol}}{\|[e]\|}} \right\}, \rho \in (0, 1), r > 1$$

Falls  $[e] \leq \text{tol}$ :  $x_{i+1} := x$

$$\eta_{i+1} := \widehat{y}$$

$$h_{i+1} := \min\{h, b - x_{i+1}\}$$

Ansonsten verwirfe Schritt mit  $h_i := h$ .

## Stabilität von DGLs

Sei  $y' = f(x, y)$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $y(x) \in \mathbb{R}^n$  System von  $n$  DGLs und habe  $\forall (x_0, y_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  eindeutige Lösung  $\varphi \in C^1([0, \infty))$ .

Diese Lösung  $\varphi$  ist *stabil*, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in C^1([0, \infty)) : \|\varphi(x_0) - y(x_0)\| < \delta \implies \forall x \geq x_0 : \|\varphi(x) - y(x)\| < \epsilon.$$

Diese Lösung  $\varphi$  ist *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil ist und zusätzlich  $\exists \delta > 0 \forall y \in C^1([0, \infty)) : \|\varphi(x_0) - y(x_0)\| < \delta \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \|\varphi(x) - y(x)\| = 0$ .

## Stabilität von linearen DGLs

Sei  $y' = Ay$ ,  $y(x_0) = y_0$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine lineare DGL mit Lösung  $y(x) = e^{(x-x_0)A} y_0$ .

Hierbei ist  $e^{xA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xA)^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben.

$y$  ist *stabil* gdw.  $\forall \lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) \leq 0$  und für  $\lambda \in \sigma(A)$  mit  $\text{Re}(\lambda) = 0$  gilt  $\mu_a(A, \lambda) = \mu_g(A, \lambda)$ .

$y$  ist *asymptotisch stabil* gdw.  $\forall \lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) < 0$ .

## Steife Differentialgleichungen

Eine asymptotisch stabile DGL  $y' = Ay + b$  ist *steif*, wenn die negativen Realteile der Eigenwerte von  $A$  sich um Größenordnungen unterscheiden:

$$\gamma := \frac{\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\text{Re}(\lambda)|}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\text{Re}(\lambda)|}$$

Typischerweise bewegt sich das *Steifheitsmaß*  $\gamma$  für reale Beispiele zwischen  $10^3$  und  $10^6$ .

Zur numerischen Lösung steifer DGLs sind implizite Verfahren geeignet.

## Implizite Runge-Kutta-Verfahren

Ein  $s$ -stufiges RKV ist *implizit*, wenn zugehörige  $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$  keine strikte untere Dreiecksmatrix ist.

$(c, b, A)$  ist invariant gegen Autonomisierung gdw. es konsistent ist und  $\forall i \in [s] : c_i = \sum_{j=1}^s a_{i,j}$  gilt.

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen impliziter RKV entspricht der Anzahl für explizite RKV. Implizite RKV bieten jedoch mehr Freiheitsgrade.

## RKV vom Kollokationstyp

Implizite RKV ohne Lösen der Bedingungsgl.:

$u \in \Pi_s$  mit  $u(x+h) = y + h \cdot \Phi(x, y, h)$  und  $\forall i \in [s] : u'(x+c_i h) = f(x+c_i h, u(x+c_i h))$ .

d.h.  $u$  erfüllt DGL in mindestens  $s$  Stellen.

Solche Verfahren sind durch  $(c_1, \dots, c_s)$  gegeben.

Interpretiert als  $s$ -stufiges implizites RKV:

$$a_{i,j} := \int_0^{c_i} L_j(\vartheta) d\vartheta$$

$$k_i := f(x+c_i h, y + h \sum_{j=1}^s a_{i,j} k_j)$$

$$b_j := \int_0^1 L_j(\vartheta) d\vartheta$$

## Mehrschrittverfahren

Für  $k \in \mathbb{N}$  wird  $\eta_{i+1}$  aus  $\eta_{i+1-k}, \dots, \eta_i$  berechnet. Lineares  $k$ -Schrittverfahren berechnet  $\eta(\cdot, h)$ :

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \eta_{j+i} = h \cdot \sum_{i=0}^k \beta_i f(x_{j+i}, \eta_{j+i})$$

Mit Koeffizienten  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$  für  $i \in [k]$ .

Explizites  $k$ -Schrittverfahren:  $\beta_k = 0, |\alpha_0| + |\beta_0| > 0$

Implizites  $k$ -Schrittverfahren:  $\beta_k \neq 0, \alpha_k \neq 0$

## Darstellung mit Shiftoperator

$$(E\varphi)(x) := \varphi(x+h)$$

$$\left( \sum_{i=0}^k \alpha_i E^i \right) \cdot \eta(x, h) = h \cdot \left( \sum_{i=0}^k \beta_i E^i \right) \cdot f(x, \eta(x, h))$$

Noch kompakter mit Polynomen  $\rho(\xi) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \xi^i$  und  $\sigma(\xi) = \sum_{i=0}^k \beta_i \xi^i$ :  $\rho(E)\eta = h\sigma(E)f$

## Konsistenz

Differenzenoperator aus  $\rho(E)\eta - h\sigma(E)f = 0$ :

$$L(x, y, h) := \frac{1}{h} (\rho(E)y(x) - h\sigma(E)y'(x))$$

Ein lineares  $k$ -Schrittverfahren hat Konsistenzordnung  $p$ , wenn  $\forall$  hinreichend glatte  $f : L(x, y, h) \in \mathcal{O}(h^p)$  glm.  $\forall x, h$  s.d.  $[x, x+kh] \subset [x_0, b]$ .

Einsetzen von Einschrittverfahren in  $L$  ergibt den lokalen Diskretisierungsfehler.

## Konsistenzcharakterisierung

Ein lineares  $k$ -Schrittverfahren hat Konsistenzordnung  $p$  gdw. eine der folgenden Bed. gilt:

(a) Für glatte  $y : L(x, y, h) \in \mathcal{O}(h^p)$  glm. in  $x, h$

(b)  $\forall Q \in \Pi_p : L(x, Q, h) = 0$

(c)  $L(0, \exp, h) = \frac{1}{h} (\rho(e^h) - h\sigma(e^h)) \in \mathcal{O}(h^p)$

(d) For  $m = 1, \dots, p$ :  
 $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \sum_{j=0}^k \alpha_j j^m = m \sum_{j=0}^k \beta_j j^{m-1}$

Insbesondere hat ein Mehrschrittverfahren die Ordnung  $p = 1$ , falls:  $\rho(1) = 0 \wedge \rho'(1) = \sigma(1)$

## Homogene lineare Differenzgleichung

$$y_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} = 0$$

$k$ -ter Ordnung mit Koeff.  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  für  $i \in [k-1]$ .

## Stabilität

Lineares Mehrschrittverfahren  $(\rho, \sigma)$  ist *stabil*, wenn Differenzgleichung  $\rho(E)\eta = 0$  stabil ist. Dies ist der Fall gdw.  $\forall$  Nullstellen  $\xi$  von  $\rho$  gilt:  $|\xi| \leq 1$ , dabei  $|\xi| = 1$  nur für einfache Nullstellen.

## Strikte Stabilität

Ein Mehrschrittverfahren ist *strikt stabil*, wenn für Nullstellen  $\xi \neq 1$  von  $\rho$  gilt:  $|\xi| < 1$

## Konvergenz

Ein Mehrschrittverfahren konvergiert gegen Lösung  $y \in C^1(x_0, b)$  von  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ , wenn, sobald  $\forall j \in [k-1] : \lim_{h \rightarrow 0} \eta(x_0 + jh, h) = y_0$ :

$$\forall x \in \mathcal{G}_k \cap [x_0, b] : \lim_{h \rightarrow 0} \eta(x, h) = y(x)$$

Konvergentes lineares Mehrschrittverfahren ist stabil und konsistent. Insb. gilt  $\rho'(1) = \sigma(1) \neq 0$ .

Umgekehrt auch: Ein stabiles und konsistentes Mehrschrittverfahren ist konvergent.

## Satz von Dahlquist

Für die Konsistenzordnung  $p$  eines stabilen linearen  $k$ -Schrittverfahrens gilt:

- $p \leq k + 2$  wenn  $k$  gerade
- $p \leq k + 1$  wenn  $k$  ungerade
- $p \leq k$  wenn  $\frac{\beta_k}{\alpha_k} \leq 0$ ,  
d.h. insb für explizite Verfahren

Für die Konsistenzordnung  $p$  von strikt stabilen linearen  $k$ -Schrittverfahren gilt  $p \leq k + 1$ .

## Adams-Verfahren

Verallgemeinerung der Euler-Verfahren.

Setze  $\rho(\xi) := \xi^k - \xi^{k-1}$  s.d. einfache Nst.  $\xi = 1$  und  $(k-1)$ -fache Nst.  $\xi = 0$  gegeben sind. Dies ergibt:

$$\eta_{k+1} - \eta_{j+k-1} = h \cdot \sigma(E) \cdot f(x_j, \eta(x_j, h))$$

Für explizites Verfahren:  $p = k$  mit  $\beta_k = 0$ .

Für implizites Verfahren:  $p = k + 1$  mit  $\beta_k \neq 0$ .

## Partielle Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen in  $d$  Variablen:

$$-\sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \partial_{x_i}^2 \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^d b_i(x) \partial_{x_i} u + c(x)u(x) = f(x)$$

$A(x) := \{a_{i,k}(x)\}_{1 \leq i,k \leq d}$  ist symmetrisch.

## Nicht erschöpfende Klassifikation

DGL ist *elliptisch* in  $x$ , falls  $A(X)$  pos. def. ist.

DGL ist *hyperbolisch* in  $x$ , falls  $A(X)$  1 negativen und  $d-1$  positive Eigenwerte hat.

DGL ist *parabolisch* in  $x$ , falls  $A(X)$  pos. semidef. und Rang von  $((A(x), b(x))) \in \mathbb{R}^{d \times (d+1)}$  maximal ist.

## Finite Differenzen

Für  $d \in \mathbb{N}$ , Auflösung  $n \in \mathbb{N}$  und Knotenabstand  $h = \frac{1}{n+1}$  sei Gitter  $\mathcal{G}_h$  auf Rechteckgebiet  $\Omega = (0, 1)^d$  gegeben als:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_h &:= \{x \in \overline{\Omega} \mid x = hi, i \in [n+1]^d\} && \text{Gitter} \\ \mathcal{G}_h^o &:= \mathcal{G}_h \cap \Omega && \text{innere Knoten} \\ \mathcal{G}_h^\partial &:= \mathcal{G}_h \setminus \mathcal{G}_h^o && \text{Randknoten} \end{aligned}$$

Dabei sind  $v_h : \mathcal{G}_h \rightarrow \mathbb{R}$  Gitterfunktionen:

$$\begin{aligned} V_h &:= \{v_h : \mathcal{G}_h \rightarrow \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^{|\mathcal{G}_h|} \\ V_h^o &:= \{v_h : \mathcal{G}_h^o \rightarrow \mathbb{R}\} \\ V_h^\partial &:= \{v_h : \mathcal{G}_h^\partial \rightarrow \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

## Diskrete Differentialoperatoren

Für  $\ell = 1, \dots, d$  und Einheitsvektoren  $e^{(\ell)} \in \mathbb{R}^d$  sei für  $x \in \mathcal{G}_h^o$  diskreter Differentialoperator definiert:

$$\partial_\ell^{+h} v(x) = \frac{1}{h} (v(x + he^{(\ell)}) - v(x)) \quad \text{Vorwärts}$$

$$\partial_\ell^{-h} v(x) = \frac{1}{h} (v(x) - v(x - he^{(\ell)})) \quad \text{Rückwärts}$$

$$\partial_\ell^h v(x) = \frac{1}{h} (v(x + he^{(\ell)}) - v(x - he^{(\ell)})) \quad \text{Zentral}$$

Diskreter Laplace-Operator  $\Delta_h : V_h \rightarrow V_h^o$  ist geg.:

$$\Delta_h v_h(x) := \sum_{\ell=1}^d \partial_\ell^{+h} \partial_\ell^{-h} v_h(x)$$

Der *allgemeine lineare Differentialoperator*:

$$Lv(x) = -a(x)\Delta v(x) + \vec{b}(x) \cdot \nabla v(x) + c(x)v(x), \quad x \in \Omega$$

wird auf  $V_h$  für  $x \in \mathcal{G}_h^o$  mit z.B.  $\nabla^h := (\partial_1^h, \dots, \partial_d^h)$  approximiert durch:

$$L_h v_h(x) = -a(x)\Delta_h v_h(x) + \vec{b}(x) \cdot \nabla^h v_h(x) + c(x)v_h(x)$$

## Konsistenz von Operatoren

Der *Restriktionsoperator*  $I_h : C^0(\overline{\Omega}) \rightarrow V_h$  ist def. als  $I_h v(x) = v(x)$  für  $x \in \mathcal{G}_h$ .

$L_h : V_h \rightarrow V_h^o$  und  $L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$  sind *konsistent* von Ordnung  $\kappa > 0$  bzgl.  $\|\cdot\|_h$  auf  $V_h$ , wenn:

$$\forall v \in C^\infty(\Omega) : \|I_h^o L v - L_h I_h v\|_h \leq Ch^\kappa \quad \text{für } h \rightarrow \infty$$

Norm  $\|\cdot\|_{h,\infty}$  auf  $V_h$  ist def.:  $\|v_h\|_{h,\infty} := \max_{x \in \mathcal{G}_h} |v_h(x)|$

Konkret für  $v \in C^\infty(\Omega)$  und  $x \in \mathcal{G}_h^o$ :

$$\partial_\ell v(x) - \partial_\ell^{+h} v(x) = \mp \frac{1}{2} h \partial_\ell^2 v(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\partial_\ell v(x) - \partial_\ell^h v(x) = -\frac{1}{6} h^2 \partial_\ell^3 v(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\Delta v(x) - \Delta_h v(x) = -\frac{1}{12} h^2 \sum_{i=1}^d \partial_i^4 v(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

## Differenzensterne

Für  $S := \{e \in \mathbb{Z}^d \mid |e|_\infty \leq 1\}$  können diskrete Operatoren dargestellt werden als:

$$L_h v_h(x) = \sum_{e \in S} a_e(x) v_h(x + he)$$

Stencil für  $d = 1$ :  $[a_{-1}(x) \quad a_0(x) \quad a_1(x)]$ .

z.B. der diskrete Laplace-Operator in  $d \in \{1, 2\}$ :

$$\Delta_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw. } \Delta_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$