

Eigenwerte

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ist *Eigenwert* von A , wenn $\exists v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : Av = \lambda v$.

Satz von Gerschgorin

$$\mathcal{K}_i := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{i,k}| =: r_i \right\}, 1 \leq i \leq n$$

Die Vereinigung der Kreisscheiben \mathcal{K}_i enthält alle Eigenwerte von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i$

Ist $M_1 = \bigcup_{j=1}^k \mathcal{K}_{i_j}$ disjunkt von der Vereinigung M_2 der übrigen Kreise, so enthält M_1 genau k und M_2 genau $n - k$ Eigenwerte gezählt entsprechend der algebraischen Vielfachheit.

Störung des Eigenwertproblems

Sei A diagonalisierbar mit $A = TDT^{-1}$, $\Delta A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ beliebig: $\forall \lambda(A + \Delta A) \in \sigma(A + \Delta A) \exists \lambda(A) \in \sigma(A) : |\lambda(A + \Delta A) - \lambda(A)| \leq \kappa_p(T) \|\Delta A\|_p$ mit $1 \leq p \leq \infty$.

Entsprechend lautet die Kondition der Bestimmung von Eigenwerten $\lambda \neq 0$ bzgl. der p -Norm:

$$\kappa_p(\lambda) \leq \frac{\|A\|_p}{|\lambda|} \kappa_p(T)$$

Mögliche Eigenwertlöser

Das Eigenwertproblem ist äquivalent zur Bestimmung der Nullstellen des char. Polynoms. Nach dem *Satz von Abel* existiert für Polynome von Grad ≥ 5 bzw. Matrizen von Dimension $\geq 5 \times 5$ kein exakt arbeitender Eigenwertlöser welcher in endlicher Zeit die Eigenwerte bestimmt. d.h. alle Eigenwertlöser sind iterativ.

Potenzmethode

In A^k dominiert der betragsgrößte Eigenwert und diese Dominanz nimmt mit k zu. Somit ist an $A^k v$ der betragsgrößte Eigenwert ablesbar. Für $k = 1, 2, \dots$ und Startvektor $x^0 \in \mathbb{C}^n$:

$$z^k := Ax^{k-1}, x^k := \frac{z^k}{\|z^k\|}$$

Der approx. betragsgrößte Eigenwert ergibt sich:

$$\tilde{\lambda} = \langle Ax^k, x^k \rangle_2$$

Potenzmethode konvergiert nicht zwingend gegen einen EV des betragsgrößten EW sondern hat Häufungspunkte welche EV zu diesem EW sind.

Inverse Potenzmethode

Die Konvergenzgeschwindigkeit der Potenzmethode hängt von $|\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}|$, also dem Quotienten des ersten nicht betragsmaximalen Eigenwerts und des betragsmaximalen Eigenwertes ab.

Langsame Konvergenz liegt bei $|\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}| \approx 1$ vor.

Sei $\tilde{\lambda}$ Schätzwert für $\lambda_i \in \sigma(A)$ d.h. $|\tilde{\lambda} - \lambda_j| < |\tilde{\lambda} - \lambda_j|$, $j \neq i$. Die inverse Potenzmethode:

$$(A - \tilde{\lambda} I_n) z^k = x^{k-1}, x^k = \frac{z^k}{\|z^k\|_2}$$

Zur Lösung des linearen Systems wird die LR-Zerlegung von $A - \tilde{\lambda} I_n$ bestimmt. Konvergenz:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Ax^k, x^k \rangle_2 = \lambda_i$$

Wird die Approximation $\tilde{\lambda}$ in jedem Iterationsschritt durch die gefundene Approx. verbessert, so approx. das Verfahren einen EV zum EW λ_i .

Hessenberg- / Tridiagonalgestalt

Eigenwertlöser beginnen i.A. mit der Äquivalenzumformung von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in obere Hessenberg- bzw. Tridiagonalgestalt \mathcal{H} . Danach wird \mathcal{H} in eine obere Dreiecks- bzw. Diagonalmatrix äquivalent umgeformt. Die Hauptdiagonale einer solchen Matrix besteht dann aus den Eigenwerten von A .

QR-Algorithmus

Sei $A = QR$ eine QR-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Eine *QR-Transformation* ist $A \mapsto A' := RQ$.

A' ist orthogonalähnlich zu A und $\sigma(A) = \sigma(A')$. Ist A eine obere Hessenberg- oder symmetrische Tridiagonalmatrix, so hat A' dieselbe Struktur.

Transformiere A in obere Hessenberg- bzw. symmetrische Tridiagonalgestalt. Setze dann $A_0 := A$ und iteriere:

$$A_k := Q_k R_k, A_{k+1} := R_k Q_k \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots$$

QR-Identitäten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gelten für $\{A_k\}_k$:

- $A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$
- $A_{k+1} = Q_{k+1}^T A Q_{k+1}$ mit $Q_{k+1} := Q_0 \cdots Q_k$
- $A^{k+1} = Q_{k+1} R_{k+1}$ mit $R_{k+1} := R_k \cdots R_0$

Diese begründen den Zusammenhang von QR-Algorithmus und Potenzmethode.

QR mit Spektralverschiebung

Der ursprüngliche QR-Algorithmus konvergiert langsam. Dies lässt sich mit Anwendung auf $\tilde{A} = A - \mu I_n$ (Shift / Spektralverschiebung) verbessern.

Transformiere A in obere Hessenberg- bzw. symmetrische Tridiagonalgestalt. Setze dann $A_0 := A$ und iteriere: $A_k - \mu_k I_n =: Q_k R_k$, $A_{k+1} := R_k Q_k + \mu_k I_n$ für $k = 0, 1, 2, \dots$

Bewährte Shift-Strategie: $\mu_k := (A_k)_{nn}$
 $|(A_{k+1})_{n,n-1}| \leq c |(A_k)_{n,n-1}|^2$ (quadratische Konv.)

Bestimmung der Eigenvektoren

Auf die obere Hessenberg-Form $A_0 = P^T A P$ lässt sich die inverse Potenzmethode mit den berechneten Eigenwertnäherungen als Schätzwert anwenden. Das auftretende LGS $A_0 - \tilde{\lambda} I_n$ lässt sich effizient mit $n - 1$ Givens-Rotationen lösen.

Nichtlineare Gleichungssysteme

Die Berechnung von Nullstellen von nichtlinearer $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann i.A. nur iterativ erfolgen.

Konvergenzordnung

Sei $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}^n$ gegen $\xi \in \mathbb{R}^n$ konv. Folge. Die Folge ist von Ordnung $p \geq 1$, wenn:
 $\exists C > 0 : \|x^{k+1} - \xi\| \leq C \|x^k - \xi\|^p$ für $k = 0, 1, \dots$
 Falls $p = 1$ sei zusätzlich $C < 1$.

- $p = 1$ ($C < 1$) lineare Konvergenz
- $p \in (1, 2)$ superlineare Konvergenz
- $p = 2$ quadratische Konvergenz
- $p = 3$ kubische Konvergenz

Lokale Konvergenz

Ein Iterationsverfahren $x^{k+1} = \Phi_k(x^k)$ mit $\Phi_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist *lokal konvergent* gegen $\xi \in \mathbb{R}^n$, wenn: \exists Umgebung $U \subset D$ von $\xi \forall x^0 \in U : \{x^k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen ξ .
 Ist $U = D$ so konvergiert das Verfahren global.

Nullstellen einer Veränderlichen

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $a < b \in \mathbb{R}$.

Bisektionsverfahren

Sei $f(a)f(b) < 0$. Dann garantiert der Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle $\xi \in (a, b)$.

Intervallhalbierung approximiert eine Nullstelle.

$$x_k := \frac{b_k + a_0}{2}$$

$$f(x_k)f(a_k) \leq 0 \rightsquigarrow a_{k+1} := a_k, b_{k+1} := x_k$$

$$f(x_k)f(a_k) > 0 \rightsquigarrow a_{k+1} := x_k, b_{k+1} := b_k$$

Das Bisektionsverfahren konvergiert mit Abbruchbedingung $|f(x_k)| < \tau$ für bel. $\tau > 0$ in endlich vielen Schritten. Falls f Hölder-stetig mit Ordnung $\alpha \in (0, 1]$ ist, konvergiert das Verfahren nach maximal $\lceil \log_2((b-a)(\frac{1}{\tau})^{1/\alpha}) \rceil$ Schritten.

Sekantenverfahren

Zwei Approximationen x_{k-1} und x_k ergeben neue Approximation x_{k+1} als Nullstelle der Sekante $S_f(x; x_k; x_{k-1}) = f(x_k) + \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} (x - x_k)$.
 Rekursion:

$$x_{k+1} := x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

Sei $f \in C^2(a, b)$, $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi), f''(\xi) \neq 0$. Dann konvergiert das Sekantenverfahren lokal superlinear mit Ordnung $(\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1.618$.

Newton-Verfahren

Ersetzen von $\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$ im Sekantenverfahren mit dem Kehrwert der Tangentensteigung $\frac{1}{f'(x_k)}$ ergibt das *Newton-Verfahren*:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

x_{k+1} ist Nullstelle der Tangente an f in x_k .

Sei $f \in C^2(a, b)$, $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) \neq 0$. Dann konv. das Newton-Verfahren lokal mit Ordnung 2.

Banachscher Fixpunktsatz

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $\Phi : D \rightarrow D$ Kontraktion bzgl. $\|\cdot\|$ mit Kontraktionszahl $q \in [0, 1)$. Dann hat Φ genau einen Fixpunkt $x^* \in D$. Die Fixpunktiteration $x^{k+1} := \Phi(x^k)$ mit $x^0 \in D$ konv. Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$\forall 0 \leq l \leq k - 1 : \|x^* - x^k\| \leq \frac{q^{k-l}}{1-q} \|x^{l+1} - x^l\|$$

Für $l = 0$ ergibt sich die a priori-Abschätzung:

$$\|x^* - x^k\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^1 - x^0\|$$

Für $l = k - 1$ die a posteriori-Abschätzung:

$$\|x^* - x^k\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^k - x^{k-1}\|$$

Lokaler Konvergenzsatz

Sei $\Phi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Fkt., D offen, $\exists x^* \in D : f(x^*) = x^*$ und $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.

Dann ex. abgeschlossene Umgebung $U \subset D$ von x^* s.d. Φ in ihr Kontraktion und Selbstabbildung $\Phi(U) \subset U$ ist sowie die Fixpunktiteration konv.

Newton-Verfahren in \mathbb{R}^n

Sei $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nichtlineare Funktion. Zu finden ist ein $x^* \in D$ mit $F(x^*) = 0$.

Sei $\Phi(x) := x + G(x, F(x))$ mit $G(x, F(x)) = T(x)F(x)$ wobei $T : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Das Nullstellenproblem ein Fixpunktproblem:

$$\Phi(x^*) = x^* \iff F(x^*) = 0$$

Es ergibt sich das *Newton-Verfahren* für $x^0 \in D$: $x^{k+1} := x^k + s^k$, $F'(x^k)s^k = -F(x^k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ s^k ist der k -te *Newton-Schritt oder Korrektur*.

Für Konvergenzuntersuchungen formuliert: $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ mit $\Phi(x) = x - F'(x)^{-1}F(x)$

Wohldefiniertheit des Newton-Verfahrens

Sei $x^* \in D$ Lösung des Nullstellenproblems, $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar. mit regulärer $F'(x^*)$:

- (a) \exists Umgebung U mit $x^* \in U \forall x^0 \in U$: Newton-Verfahren ist wohldefiniert und mindestens linear konvergent gegen x^*
- (b) Ist $F' : D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ Hölder-stetig in U mit Ordnung $\alpha \in (0, 1]$ dann: $\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_N \|x^k - x^*\|^{1+\alpha}$ mit $C_N > 0$ Verfahren konv. superlinear mit Ordnung $1+\alpha$ für $\alpha \in (0, 1)$ und quadratisch für $\alpha = 1$

Konvergenzüberprüfung

Eine wichtige Invarianzeigenschaft des Newton-Verfahrens ist, dass $F(\cdot)$ und $G(\cdot) = AF(\cdot)$ für $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ dieselben Nullstellen haben, dass Verfahren sich also auf F oder G anwenden lässt.

Der *Monotonietest* $\|F(x^{k+1})\| \leq \vartheta \|F(x^k)\|$, $\vartheta \in (0, 1)$ spiegelt dies nicht wieder.

Er ist nicht affin-invariant, im Gegensatz zum Newton-Verfahren und dem Nullstellenproblem.

Der *affin-invariante natürliche Monotonietest*:

$$\|F'(x^k)^{-1}F(x^{k+1})\| \leq \vartheta \|F'(x^k)^{-1}F(x^k)\|$$

Praktisch wird das Newton-Verfahren bei Verletzung des Tests mit $\vartheta = \frac{1}{2}$ als divergent gestoppt.

Stoppstrategie

Ein x^{k+1} wird als Approximation an x^* akzeptiert, wenn $\|s^k\| \leq \tau$ mit $s^k := F'(x^k)^{-1}F(x^k)$ ist. $\tau > 0$ ist die gewählte Toleranz.

Satz von Kantorowitsch

Sei $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktion mit Eigenschaften: $\exists \beta, \gamma, \eta > 0 : \beta\gamma\eta \leq \frac{1}{2}$ und $x^0 \in D$ s.d.:

- (i) F ist in x^0 diffbar. mit $\|F'(x^0)^{-1}\| \leq \beta$ und $\|F'(x^0)^{-1}F(x^0)\| \leq \eta$
- (ii) F' ist Lipschitz-stetig mit γ in abg. Kugel $\overline{B_{\bar{r}}(x^0)} \subset D$ mit Radius $\bar{r} \geq r_- := \frac{1 - \sqrt{1 - 2\beta\gamma\eta}}{\beta\gamma}$

Dann ex. eine eind. Nst. x^* von F in $\overline{B_{r_-}(x^0)}$ und das Newton-Verfahren mit $x^0 \in D$ ist wohldef.

Weiter gilt: $\|x^k - x^*\| \leq t_k := \frac{(2\beta\gamma\eta)^{2^k}}{2^k\beta\gamma}$

Zusätzlich ist x^* die eind. Nst. in offener Kugel $B_R(x^0)$ mit $R = \min\{\bar{r}, r_+\}$ und $r_+ := \frac{1 + \sqrt{1 - 2\beta\gamma\eta}}{\beta\gamma}$.

Inexakte Newton-Verfahren

Hier wird der Newton-Schritt s^k zu Beginn nur grob approximiert und nur in der Nähe der Nullstelle präzise berechnet. Dies dient der Reduktion der Rechenzeit bei Beibehaltung der quadratischen Konvergenz. Für $x^0 \in D, k = 0, 1, 2, \dots$:

$$x^{k+1} := x^k + s^k, \|F'(x^k)s^k + F(x^k)\| \leq \eta_k \|F(x^k)\|$$

Hierbei ist $\{\eta_k\}_k \subset [0, 1)$ die Toleranz.

Der inexakte Schritt wird aus $F'(x^k)s^k = -F(x^k)$ bestimmt, s.d. das relative Residuum kleiner gleich η_k ist. Dies ist über frühes Stoppen von iterativen Lösern wie GMRES zu erreichen.

Nichtlineare Ausgleichsprobleme

Sei $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $n \neq m$.

Finde die Lösung einer Minimierungsaufgabe: $x^* \in D : g(x^*) = \min_{x \in D} g(x)$ mit $g(x) := \|F(x)\|^2$.

$\|\cdot\|$ sei die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$.

Gauß-Newton-Verfahren

Ziel ist die Bestimmung von n Parametern x einer Modellfunktion φ mit Hilfe von m Messungen.

Sei $\{(t_i, b_i) : 1 \leq i \leq \ell\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ Meßdatensatz mit Meßpunkten $t_i \in \mathbb{R}^d$ und Meßwerten $b_i \in \mathbb{R}^p$.

Modell $\varphi(t_i; x) = b_i$ wird identifiziert mit:

$$F(x) := \begin{pmatrix} \varphi(t_1; x) - b_1 \\ \vdots \\ \varphi(t_\ell; x) - b_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, m = \ell p$$

Konkret gelöst wird das lokale Minima x^* von g mit $\nabla g(x^*) = 0$ und $\mathcal{H}g(x^*)$ positiv definit.

$$\nabla g(x) = 2F(x)^T F'(x)$$

$$G(x^*) := \frac{1}{2} \nabla g(x^*)^T = F'(x^*)^T F(x^*) = 0$$

Nullstelle wird mit Newton-Verfahren bestimmt.

$$G'(x) \approx F'(x)^T F'(x)$$

Für x in der Nähe eines Minimums von g . Das konkrete *Gauß-Newton-Verfahren*:

$$x^{k+1} := x^k + s^k, s^k := -F'(x^k)^+ F(x^k), k = 0, 1, 2, \dots$$

Wobei $F'(x)^+ = (F'(x)^T F'(x))^{-1} F'(x)^T$.

Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens

Sei $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $m \geq n$ und habe Lösung x^* s.d. F' Maximalrang hat: $F'(x^*)$ ist injektiv. Weiter gelte für $\kappa \in [0, 1)$ $\|F'(x)^+ F(x^*)\| \leq \kappa \|x - x^*\|$ lokal um x^* . Dann:

- (a) Das Gauß-Newton-Verfahren konvergiert lokal mindestens linear gegen x^*
- (b) Ist F' Hölder-stetig mit Ordnung $\alpha \in (0, 1]$ in der Nähe von x^* so gilt: $\|x^{k+1} - x^*\| \leq C_{GN} \|x^k - x^*\|^{1+\alpha} + \kappa \|x^k - x^*\|$ Falls $F(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenz superlinear von Ordnung $1+\alpha$. Sonst linear.

Numerische Integration

Numerische Auswertung des Riemann-Integrals:

$$I(f) = I_a^b(f) = \int_a^b f(t) dt$$

Die Integralabbildung $I : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto I(f)$ ist additive, positive Linearform.

Kondition der Quadraturaufgabe

Die Kondition der Aufgabe (I, f) bezüglich der L^1 -Norm $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$ ist: $\kappa(f) = \frac{I(|f|)}{|I(f)|}$

Gute Konditionierung ist bei vorzeichenwechsellosen f gegeben, oszillierende f haben $\kappa(f) \gg 1$.

Quadraturformeln

Eine *Quadraturformel* $\widehat{I}(f)$ ist def. als:

$$\widehat{I}(f) := (b-a) \sum_{i=0}^n \lambda_i f(t_i)$$

Mit $n+1$ ansteigenden Knoten t_i sowie Gewichten λ_i s.d. $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$.

Trapezsumme

$$\widehat{I}_n := \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{t_i - t_{i-1}}{2} (f(t_{i-1}) + f(t_i))$$

Konstruktion von Quadraturformeln

f werde durch Linearkombination einfach integrierbarer Funktionen p_i approximiert:

$$\widehat{I}(f) := I(\tilde{f}) = \sum_{i=0}^n f(t_i) I(p_i)$$

Wobei $\tilde{f}(t) := \sum_{i=0}^n f(t_i) p_i(t)$

Newton-Cotes-Formeln

f wird mit Polynomen, z.B. *Lagrange-Polynomen* $L_{n,i}$ aus Numerik 1 approximiert.

$$\begin{aligned} \widehat{I}_n(f) &:= \int_a^b P(f|t_0, \dots, t_n)(t) dt \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n \frac{1}{b-a} \int_a^b L_{n,i}(t) dt f(t_i) \end{aligned}$$

Die Gewichte $\lambda_{n,i}$ hängen von der Knotenwahl ab. \widehat{I}_n ist exakt für Polynome bis Grad n . Zu $n+1$ verschiedenen Knoten gibt es genau eine Quadraturformel die für alle $Q \in \Pi_n$ exakt ist.

Sind die Knoten äquidistant mit $t_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, heißen die Quadraturformeln *Newton-Cotes-Formeln* mit Gewichten:

$$\lambda_{n,i} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt$$

n	Gewichte	Fehler	Regel
1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{h^3}{12} f''(\tau)$	Trapez
2	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tau)$	Simpson
3	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\tau)$	3/8
4	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	$\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\tau)$	Milne

Romberg-Quadratur

Die *Romberg-Quadratur* wertet die Trapezsumme bzgl. einer Folge von Gittern aus und extrapoliert aus den Integralen eine bessere Approximation.

Konkret wird ein interpolierendes Polynom durch Stützwerte $(h_0^2, T(h_0)), (h_1^2, T(h_1)), \dots, (h_m^2, T(h_m))$ gelegt und an der Null ausgewertet:

$$P(T|h_0^2, \dots, h_m^2)(0) \approx I(f)$$

Da das interpolierende Polynom nur in 0 ausgewertet wird, bietet sich das *Schema von Neville* an.

$$T_{i,0} = P(T|h_i^2) = T(h_i)$$

$$\begin{aligned} T_{i,k} &:= P(T|h_{i-k}^2, h_{i-k+1}^2, \dots, h_i^2)(0) & 0 \leq k \leq i \leq m \\ &= T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\frac{h_{i-k}^2}{h_i^2} - 1} & 1 \leq k \leq i \leq m \end{aligned}$$

Verkleinerung des Gitters

Folgen zur Verkleinerung der Grundschriftweite:

$$h_j = \frac{h_{j-1}}{2} = \frac{h}{2^j} \text{ mit } n_j = 2^j \text{ ist die Romberg-Folge.}$$

$$h_1 = \frac{h}{2}, h_2 = \frac{h}{3}, h_3 = \frac{h}{4}, h_j = \frac{h}{n_j}, j = 4, 5, \dots \text{ mit } n_j = 2n_{j-2} \text{ für } j \geq 4 \text{ ist die Bulirsch-Folge.}$$

Vorteil der Bulirsch-Folge ist, dass sie mit weitaus weniger Auswertungen der Funktion auskommt.