Grundlagen

Betrachtet wird Folge von Zufallsvariablen (X_n) auf Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $X_n : \Omega \to S$. S sei endlich oder abzählbar unendlich.
X_n beschreibt Zustand des Systems zur Zeit n.
(X_n) ist *stochastischer Prozess* in diskreter Zeit.

Stochastische Matrizen

Eine Matrix $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$ heißt *stochastisch*, falls $p_{ij} \geq 0$ und $\forall i \in S : \sum_{j\in S} p_{ij} = 1$ gilt.
Produkt stochastischer Matrizen ist stochastisch.

Homogene Markov-Ketten

Eine Folge $X_0, X_1, X_2, \ldots$ von S-wertigen ZV heißt *homogene Markov-Kette* mit Übergangsmatrix P, falls für $\forall n \in \mathbb{N}$ und alle Zustände $i_k \in S$ mit $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)\\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)\\ &= p_{i_n i_{n+1}}\end{aligned}$$

p_{ij} heißen *Übergangswahrscheinlichkeiten*.
$\nu(i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$ def. für $i \in S$ die *Startverteilung*.

Jede Folge unabhängiger ZV ist Markov-Kette.
Übergangswk. einer homogenen Markov-Kette hängen nicht vom Zeitpunkt des Übergangs ab.

Charakterisierung

Es sind äquivalent:

(a) (X_n) ist MK mit Übergangsmatrix P

(b) $\forall n \in \mathbb{N}_0, i_k \in S$:
$\mathbb{P}(X_k = i_k, 0 \leq k \leq n) = \mathbb{P}(X_0 = i_0) \prod_{k=0}^{n-1} p_{i_k i_{k+1}}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}_0, i_k \in S$ mit $\mathbb{P}(X_0 = i_0) > 0$:
$\mathbb{P}(X_k = i_k, 1 \leq k \leq n | X_0 = i_0) = \prod_{k=0}^{n-1} p_{i_k i_{k+1}}$

n-Schritt Übergang

Sei P stochastische Matrix. Dann sind $p_{ij}^{(n)}$ von P^n die *n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten* zu P.
$\forall i, j \in S, m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathbb{P}(X_m = i) > 0$:
$\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_m = i) = p_{ij}^{(n)}$.

$\forall j \in S, n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{j\in S} \mathbb{P}(X_0 = i) p_{ij}^{(n)}$

Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \text{ für } i, j \in S.$$

Zustandsklassifikation

Ein Zustand $i \in S$ *führt nach* $j \in S$ (kurz $i \rightsquigarrow j$), falls $\exists n \in \mathbb{N} : p_{ij}^{(n)} > 0$.
Ein Zustand $i \in S$ *kommuniziert mit* $j \in S$ ($i \leftrightarrow j$), falls $i \rightsquigarrow j$ und $j \rightsquigarrow i$ gelten.

Äquivalenzklassen

Die Relation $i \sim j := (i \leftrightarrow j) \vee (i = j)$ definiert eine Äquivalenzrelation auf S.
Zustandsmenge S lässt sich in Äquivalenzklassen $K(i) := \{j \in S | i \sim j\}$ partitionieren.

$J \subset S$ ist *abgeschlossen*, wenn $\nexists j \in J, i \in S \setminus J : j \rightsquigarrow i$.
Die Markov-Kette (X_n) ist *irreduzibel*, falls S nur aus einer Klasse besteht. d.h. $\forall i, j \in S, i \neq j : i \leftrightarrow j$.

$J \subset S$ ist abg. gdw. $(p_{ij}, i, j \in J)$ stochastisch ist.

Eintrittszeit eines Zustands

$T_i := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = i\}$ ist die zufällige Eintrittszeit der Markov-Kette in Zustand $i \in S$.
Für $i, j \in S, n \in \mathbb{N}$ sei definiert:

$$\begin{aligned}f_{ij}^{(n)} &:= \mathbb{P}(T_j = n | X_0 = i) = \mathbb{P}_i(T_j = n)\\ &= \mathbb{P}(X_n = j, X_\nu \neq j (1 \leq \nu < n) | X_0 = i)\end{aligned}$$

$f_{ij}^{(n)}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit von i startend nach genau n Schritten in j anzugelangen.
$f_{ij}^* := \sum_{n=0}^\infty f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(\exists n \in \mathbb{N} : X_n = j)$

Ein Zustand $i \in S$ mit $f_{ii}^* = 1$ ist *rekurrent*.
Gilt $f_{ii}^* \neq 1$ so ist $i \in S$ *transient*.

$$\forall n \in \mathbb{N}, i, j \in S : p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

Zustand $i \in S$ ist rekurrent gdw. $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty p_{ii}^{(n)} = \infty$.

Solidaritätsprinzip

Ist Zustand $i \in S$ rekurrent bzw. transient, so ist $\forall j \in K(i)$ seiner Klasse rekurrent bzw. transient.

Liegen $i, j \in S$ in der selben rekurrenten Klasse, so gilt: $f_{ij}^* = f_{ji}^* = 1$.

Abgeschlossenheit

Ist eine Klasse $K \subseteq S$ rekurrent so ist S abgeschlossen, d.h. $(p_{ij}, i, j \in K)$ ist stochastisch.

Ist eine Klasse $K \subseteq S$ abgeschlossen und endlich, so ist K rekurrent.

Absorptionswahrscheinlichkeiten

Zustandsmenge S ist zerlegbar in rekurrente Klassen $K_1, \ldots, K_m$ und eine Menge transienter Zustände T s.d. $S = T \cup K_1 \cup \cdots \cup K_m$.

Sei $\tau = \inf\{n \geq 0 | X_n \notin T\}$ die Austrittszeit aus der transienten Menge, d.h. der Zeitpunkt der Absorption in eine der rekurrenten Klassen.

Sei $i \in T, k \in T^c$ und $u_{ik} = \mathbb{P}_i(X_\tau = k)$.

Für $i \in T, j \in T^c$ gilt: $u_{ij} = \displaystyle\sum_{k\in T} p_{ik} u_{kj} + p_{ij}$

Stationäre Verteilungen

Sei (X_n) MK mit Übergangsmatrix P und Startverteilung ν. Dann ist $X_n \sim \nu \cdot P^n$. Die Verteilung hängt i.A. von n und ν ab.

Ein Maß $\nu : S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist *invariant* für P, falls $\nu \cdot P = \nu$ d.h: $\sum_{i\in S} \nu(i) \cdot p_{ij} = \nu(j)$ für $j \in S$

Ist ν eine Verteilung (d.h. $\sum_{i\in S} \nu(i) = 1$) und invariant für P, so ist ν eine *stationäre Verteilung*.

Eine mit stationärer Verteilung ν gestartete MK hat zu jedem Zeitpunkt Verteilung ν:
$\mathbb{P}_\nu(X_n = j) = \sum_{i\in S} \nu(i) \cdot p_{ij}^{(n)} = \nu(j)$

Existenz und Eindeutigkeit

Sei (X_n) irreduzibel und rekurrent und $k \in S$. Dann ist ein Maß γ_k definiert mit Eigenschaften:

$$\gamma_k(i) := \mathbb{E}_k\left[\sum_{n=1}^{T_k} \mathbb{1}_{[X_n = i]}\right] \text{ für bel. } k \in S$$

(a) γ_k ist ein invariantes Maß

(b) $0 < \gamma_k < \infty$

(c) γ_k ist das einzige invariante Maß mit $\gamma_k(k) = 1$. Es ist eindeutig bis auf Vielfache.

Ist S zusätzlich endlich existiert eine eindeutige stationäre Verteilung.
Ist $(X_n$ jedoch neben irreduzibel auch transient, existiert keine stationäre Verteilung.

Mittlere Rückkehrzeit

Die *mittlere Rückkehrzeit* des Zustands $i \in S$ ist:

$$\begin{aligned}m_i := \mathbb{E}_i[T_i] &= \sum_{n=1}^\infty n \cdot \mathbb{P}_i(T_i = n) + \infty \cdot (1 - f_{ii}^*)\\ &= \sum_{n=1}^\infty n \cdot f_{ii}^{(n)} + \infty \cdot (1 - f_{ii}^*)\end{aligned}$$

$i \in S$ ist *positiv rekurrent*, wenn $m_i < \infty$.
$i \in S$ ist *nullrekurrent*, wenn $m_i = \infty$.

Positive Rekurrenz und Verteilung

Für irreduzible (X_n) sind äquivalent:

(a) Es existiert eine stationäre Verteilung

(b) $\exists i \in S : i$ ist positiv rekurrent

(c) $\forall i \in S : i$ ist positiv rekurrent

Stationäre Verteilung ist eind. geg.: $\pi(i) = \frac{1}{m_i}$
Sei ν stationäre Verteilung, dann gilt:

$$\nu(i) = \frac{\gamma_k(i)}{\sum_{j\in S} \gamma_k(j)} = \frac{\mathbb{E}_k[\sum_{n=1}^{T_k} \mathbb{1}_{X_n = i}]}{\mathbb{E}_k[T_k]}$$

$\nu(i)$ ist also durchschnittlicher Bruchteil der Zeit, den die MK in $i \in S$ verbringt.

Trichotomie irreduzibler Markov-Ketten

Eine irreduzible MK entspricht einem der Fälle:

(a) MK ist transient und es existiert keine stationäre Verteilung.

(b) MK ist nullrekurrent und es existiert ein bis auf Vielfache eindeutiges invariantes Maß aber keine stationäre Verteilung.

(c) MK ist positiv rekurrent, es gilt $\forall i, j \in S$: $\mathbb{E}_i[T_j] < \infty$ und es ex. stationäre Verteilung.

Konvergenz gegen stationäre Verteilung

Unter Voraussetzungen ist es möglich, dass die Verteilung des Zustands einer MK langfristig gegen eine stationäre Verteilung konvergiert.

Totalvariationsabstand

Seien μ, ν W-Maße auf S.
$d(\mu, \nu) := \sup_{A\subset S} |\mu(A) - \nu(A)|$
ist der *Totalvariationsabstand* zwischen μ und ν.

Es gilt $d(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i\in S} |\mu(i) - \nu(i)|$.

Periode eines Zustands

Die Periode eines Zustands $i \in S$ ist geg. als:

$$d_i = ggT\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Zustände mit $d_i = 1$ heißen *aperiodisch*.
P ist irreduzibel und aperiodisch gdw.:
$\forall i, j \in S \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : p_{ij}^{(n)} > 0$.

Konvergenzsatz

Sei MK (X_n) irreduzibel, aperiodisch und positiv rekurrent mit Startverteilung ν und stationärer Verteilung π. Dann: $\lim_{n\to\infty} d(\nu P^n, \pi) = 0$
Insb.: $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi(j) = \frac{1}{m_j}$.

Mischungszeit

Sei (X_N) irreduzible, aperiodische, positiv rekurrente MK mit stationärer Verteilung π und:
$d(n) := \sup_{i\in S} d(\delta_i P^n, \pi)$
Für $\epsilon > 0$ ist $t_{mix}(\epsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} : d(n) \le \epsilon\}$ die *Mischungszeit*. d.h. die Zeitdauer, nach der die Verteilung von $X_{t_{mix}}$ in etwa der stationären Verteilung π entspricht.

Reversibilität

Sei (X_n) MK mit Übergangsmatrix P, Zustandsraum S und stationärer Verteilung π mit $\forall i \in S : \pi(i) > 0$. Definiere $Q = (q_{ij})_{i,j\in S}$:

$$q_{ij} := \frac{\pi(j)}{\pi(i)} p_{ij},\ i,j \in S$$

Dann ist Q stochastisch und für $X_0 \sim \pi$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = j|X_{n+1} = i) &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = i|X_n = j)\mathbb{P}(X_n = j)}{\mathbb{P}(X_{n+1} = i)}\\ &= q_{ij}\end{aligned}$$

Somit ist Q Übergangsmatrix der Markov-Kette, wenn die Zeit rückwärts läuft.

Eine MK mit positiver stationärer Verteilung π ist *reversibel*, wenn: $\forall i,j \in S : \pi(i)p_{ij} = \pi(j)p_{ji}$

In diesem Fall gilt $P = Q$ und die Zeitumkehr verhält sich statistisch wie (X_n) selbst.

Markov Chain Monte Carlo

Sei S endlich, π Verteilung auf S. Ziel ist es, eine MK (X_n) auf S zu finden, s.d. π ihre stationäre Verteilung ist.
Dies ist hilfreich, wenn nach π verteilte Zufallszahlen schwierig zu erzeugen sind. Es ist einfacher (X_n) bis zu Zeitpunkt n_0 ablaufen zu lassen und X_{n_0} als Approximation von π zu nutzen.

Metropolis-Kette

Sei K irreduzible, symmetrische Übergangsmatrix auf S. Wählen $P = (p_{ij})$ mit:

$$p_{ij} = \begin{cases} K_{ij}\left(\frac{\pi(j)}{\pi(i)} \wedge 1\right) & i \ne j \\ 1 - \sum_{k\ne i} K_{ik}\left(\frac{\pi(j)}{\pi(i)} \wedge 1\right) & i = j \end{cases}$$

Dann besitzt die MK mit Übergangsmatrix P die stationäre Verteilung π.

Markov-Ketten in stetiger Zeit

Sei $(N_t)_{t\ge0}$ Familie messbarer Zufallsvariablen $N_t : \Omega \to \mathbb{N}_0$. Diese bildet *stochastischen Prozess in stetiger Zeit*.

Poisson-Prozess

Die Familie $(N_t)_{t\ge0}$ erfülle:

(a) Alle Pfade $t \mapsto N(t,\omega)$ liegen in $D_0 := \{f : [0,\infty) \to \mathbb{N}_0 | f(0) = 0, f \uparrow, f \text{ rechtsstetig}\}$.
(b) $(N_t)_{t\ge0}$ hat unabhängige Zuwächse: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall 0 \le t_0 \le \dots \le t_n$ sind $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ stochastisch unabhängig
(c) $(N_t)_{t\ge0}$ hat stationäre Zuwächse d.h. $\forall t > 0$ ist Verteilung $N_{s+t} - N_s$ von s unabhängig
(d) Ereigniss treten einzeln auf d.h.: $\mathbb{P}(N_h \ge 2) = o(h)$ mit $h \downarrow 0$

(N_t) hat mit Wahrscheinlichkeit 1 nur Sprünge der Höhe 1 und: $\exists \lambda > 0 \forall s,t \ge 0 : N_{s+t} - N_s$ ist Poisson-verteilt mit Parameter λt. Die Zeiten zwischen konsekutiven Sprüngen sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ.
Der Prozess (N_t) heißt *Poisson-Prozess* mit $\lambda > 0$.

Markov-Eigenschaft

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\ge0}$ mit abzählbarem Zustandsraum S heißt *(homogene) Markov-Kette*, wenn:
$\forall n \in \mathbb{N},\ t,h > 0, i_k \in S$ sowie $\forall 0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_n$ mit $\mathbb{P}(X_{t_k} = i_k, 0 \le k \le n) > 0$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{t_n+h} = i_{n+1}|X_{t_k} = i_k, 0 \le k \le n)\\ &= \mathbb{P}(X_{t_n+h} = i_{n+1}|X_{t_n} = i_n)\\ &= \mathbb{P}(X_{t+h} = i_{n+1}|X_t = i_n)\end{aligned}$$

Intensitätsmatrix

Sei $\{P(t), t \ge 0\}$ eine *Standardübergangsmatrizenfunktion*. Dann sind alle $p_{ij}(t)$ in 0 rechtseitig differenzierbar d.h.: $\forall i,j \in S$:

$$q_{ij} := \lim_{t\downarrow0} \frac{1}{t}(p_{ij}(t) - \delta_{ij})$$

Die Matrix $Q := (q_{ij})$ ist die *Intensitätsmatrix* bzw. der *infinitesimale Erzeuger* von $\{P(t), t \ge 0\}$.

Intensitätsmatrix des Poisson-Prozesses

Für einen Poisson-Prozess (N_t) ergibt sich die Übergangsmatrizenfunktion:

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & j \ge i \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Demenstsprechend gilt:

$$\lim_{t\downarrow0} \frac{1}{t}(p_{ij}(t) - \delta_{ij}) = \begin{cases} \lambda & j = i+1 \\ -\lambda & j = i \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Die Intensitätsmatrix des Poisson-Prozesses:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Konservative Übergangsmatrix

Sei $\{P(t), t \ge 0\}$ eine *Standardübergangsmatrizenfunktion*. Dann gilt für $q_{ij} := p'_{ij}(0)$:

(a) $0 \le q_{ij} < \infty$ für $i \ne j$, sonst $-\infty \le q_{ii} \le 0$
(b) $\sum_{j\ne i} q_{ij} \le -q_{ii} =: q_i$

Falls S endlich ist, gilt $q_i = \sum_{j\ne i} q_{ij}$ für $i \in S$. Dann heißt die Standardübergangsmatrizenfunktion *konservativ*.

Kolmogorovsche Differentialgleichung

Sei $\{P(t), t \ge 0\}$ eine Konservative Standardübergangsmatrizenfunktion und $q_i < \infty$ für $i \in S$. Dann gilt das Kolmogorovsche Rückwärtsdifferentialgleichungssystem:

$$P'(t) = QP(t),\ t \ge 0$$

d.h. $\forall i,j \in S : p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k\ne i} q_{ik} p_{kj}(t)$

Gilt weiterhin $\forall i \in S, t \ge 0 : \sum_{k\in S} p_{ik}(t) q_k < \infty$ dann ist $\{P(t), t \ge 0\}$ Lösung des *Kolmogorovschen Vorwärtsdifferentialgleichungssystems*:

$$P'(t) = P(t)Q,\ t \ge 0$$

Ist S endlich so ist die Lösung von $P'(t) = QP(t)$ mit $P(0) = E$ gegeben durch:

$$P(t) = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!}$$

Warteschlangentheorie

Jobs kommen einzeln an und werden nach *first come, first serve (FCFS)* einzeln abgefertigt.
Zwischenankunftszeiten sind unabhängig und identisch verteilt nach $Exp(\lambda)$.
Bedienzeiten der FCFS Bedienstrategie sind unabhängig und identisch verteilt mit $Exp(\mu)$.
X_t bezeichnet Anzahl wartender Jobs zur Zeit t.

Kendall-Notation

In der *Kendall-Notation* $A/B/c$ ist A der Ankunftsprozess, B der Abfertigungsprozess und c die Anzahl der Bediener.

M steht für *Markovsch* d.h. Zwischen- und Bedienzeiten sind unabh., ident. exponentialverteilt.

$M/M/1$-Modell

Im $M/M/1$-Modell existiert ein Bediener.
d.h. (X_t) ist ein Geburts- und Todesprozess mit Parametern $\lambda_0 = \lambda_i = \lambda$ und $\mu_i = \mu$ für $i \in \mathbb{N}$.

Die *Verkehrsintensität* sei definiert als $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$

Das $M/M/1$-Modell ist positiv rekurrent gdw. $\rho < 1$. Die stationäre Verteilung ist dann geometrisch mit Parameter ρ. d.h. $\pi_i = (1-\rho)\rho^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$.

Im Gleichgewicht $X \sim \pi$ gilt:

(a) $\mathbb{P}(X = 0) = \pi_0 = 1 - \rho$ ist Anteil der Zeit in welcher der Bediener unbeschäftigt ist
(b) $\mathbb{E}X = \frac{\rho}{1-\rho}$ ist die durchschnittliche Anzahl Jobs im System

$M/M/\infty$-Modell

Im $M/M/\infty$-Modell ex. unendlich viele Bediener. Entsprechend ist (X_t) ein Geburts- und Todesprozess mit Parametern $\lambda_i = \lambda, \mu_i = i\mu$ für $i \in \mathbb{N}_0$.

Das $M/M/\infty$-Modell ist immer positiv rekurrent. Die stationäre Verteilung ist eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\eta := \frac{\lambda}{\mu}$.

d.h. $\pi_i = e^{-\eta}\frac{\eta^i}{i!}$ mit $i \in \mathbb{N}_0$.

Erlangsches Verlustsystem

Betrachtet wird Telefonzentrale mit K Leitungen. Anrufe kommen nach Poisson-Prozesses mit $\lambda > 0$ an, Rufdauer ist unabhängig und identisch verteilt nach $Exp(\mu)$. Sind alle Leitungen besetzt, gehen ankommende Anrufe verloren.
Der Prozess ist ein Geburts- und Todesprozess mit $\lambda_i = \lambda$ für $i \in \{0,\dots,K-1\}$ und $\lambda_i = 0$ für $i \in \{K,\dots\}$ sowie $\mu_i = \mu \cdot i$ für $i \in \{0,\dots,K\}$ und $\mu_i = 0$ für $i \in \{K+1,\dots\}$.
Der Prozess ist positiv rekurrent mit stationärer Verteilung $\pi_i = \frac{\eta^i}{i!}\left(\sum_{n=0}^{K}\frac{\eta^n}{n!}\right)^{-1}$ mit $\eta = \frac{\lambda}{\mu}$.
Der Bruchteil verlorengegangener Anrufe ist:

$$E_K(\eta) := \frac{\eta^K}{K!}\left(\sum_{n=0}^{K}\frac{\eta^n}{n!}\right)^{-1}$$

Dies ist die *Erlangsche Verlustformel*.