Relationen

Sei $R := A \times B$ eine Relation.

Linkstotal

$\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in R$

Rechtstotal / Surjektiv

$\forall b \in B \exists a \in A : (a,b) \in R$ bzw. $f(a) = b$

Linkseindeutig / Injektiv

$\forall a_1, a_2 \in A \forall b \in B :$
$(a_1,b) \in R \wedge (a_2,b) \in R \implies a_1 = a_2$

Rechtseindeutig

$\forall a \in A \forall b_1, b_2 \in B :$
$(a,b_1) \in R \wedge (a,b_2) \in R \implies b_1 = b_2$

Eigenschaften von Relationen

reflexiv	$\forall x \in M : (x,x) \in R$
symmetrisch	$\forall x,y \in M : xRy \Leftrightarrow yRx$
antisymmetrisch	$\forall x,y \in M : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
transitiv	$\forall x,y,z \in M : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Äquivalenzrelationen

Eine Relation R auf Menge M ist Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Gruppen

$\star : M \times M \to M$ ist Verknüpfung auf Menge M abhängig der Argument-Reihenfolge. Das Tupel $(M,\star)$ ist Gruppe, wenn:

(a) $\star$ ist assoziativ
(b) $\exists e \in M \forall x \in M : x \star e = e \star x = x$
(c) $\forall x \in M \exists y \in M : x \star y = y \star x = e$

Ist $\star$ kommutativ, dann $(M,\star)$ abelsche Gruppe.

Assoziativität

$\forall m_1, m_2, m_3 \in M : (m_1 \star m_2) \star m_3 = m_1 \star (m_2 \star m_3)$

Kommutativität

$\forall m_1, m_2 \in M : m_1 \star m_2 = m_2 \star m_1$

Untergruppen

$(M,\star)$ ist Gruppe. $(H,\circ)$ ist Untergruppe, wenn:

(a) $H \subseteq M$
(b) $(H,\circ)$ ist Gruppe
(c) $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \circ h_2 = h_1 \star h_2$

Untergruppenkriterium

$H \subseteq G$ ist Untergruppe von G wenn:
$H \neq \emptyset \wedge \forall h_1, h_2 \in H : h_1 \star h_2^{-1} \in H$

Gruppenhomomorphismen

Seien $(G,\star)$ und $(H,\circ)$ Gruppen. $f : G \to H$ ist Gruppenhomomorphismus wenn:
$\forall g_1, g_2 \in G : f(g_1 \star g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$

Eigenschaften von Homomorphismen

(a) $f(e_G) = e_H$
(b) $\forall g \in G : f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
(c) $f(G)$ ist Untergruppe von H
(d) $f \in Hom(G,H)$ ist genau dann injektiv, wenn $Kern(f) = \{e_G\}$

Weitere Homomorphismen

(a) $f : G \to G$ ist Endomorphismus
(b) Bijektives $f : G \to H$ ist Isomorphismus
(c) Bijektives $f \in End(V)$ ist Automorphismus

Ringe

$(R,+,*)$ ist Ring, wenn:

(a) $(R,+)$ ist abelsche Gruppe
(b) $*$ ist assoziativ
(c) $\forall x \in R : 1_R * x = x * 1_R = x$
(d) $x * (y+z) = (x*y) + (x*z)$
(e) $(y+z) * x = (y*x) + (z*x)$

Ist $*$ kommutativ, $(R,+,*)$ ein kommutativer Ring.

Teilringe

Unter $+$ und $*$ geschlossene Teilmenge $T \subseteq R$ ist Teilring von R.

Ringhomomorphismen

$\phi : R \to S$ ist Ringhomomorphismus, wenn:

(a) $\forall x,y \in R : \phi(x +_R y) = \phi(x) +_S \phi(y)$
(b) $\forall x,y \in R : \phi(x *_R y) = \phi(x) *_S \phi(y)$
(c) $\phi(1_R) = 1_S$

Körper

Ein Körper ist kommutativer Ring K mit $0_K \neq 1_K$ und für den jedes $x \neq 0_K$ invertierbar ist.

Matrizen

Invertierbare Matrizen

Für einen kommutativen Ring R ist die "general linear Group":
$GL_p(R) := \{A \in R^{p \times p} | \exists B \in R^{p \times p} : AB = BA = I_p\}$
$A \in GL_p(R)$ sind invert. / reguläre Matrizen.

Elementarmatrizen

$$R^{2\times 3} \ni E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Äquivalenz von Matrizen

$\exists S \in GL_q(K), T \in GL_p(K) : B = TAS \; (A,B \in K^{p \times q})$

Ähnlichkeit von Matrizen

$A, \tilde{A} \in K^{d \times d}$ ähnlich $\Leftrightarrow \exists S \in GL_d(K) : \tilde{A} = S^{-1}AS$
Ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante, Spur und Rang.

Determinante

(a) $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar
(b) $det(A * B) = det(A) * det(B)$
(c) $det(A)^{-1} = det(A)^{-1}$ falls $A \in GL_n(K)$
(d) $det(A) = det(A^T)$

Vektorräume

Ein K-Vektorraum ist kommutative Gruppe $(V,+)$ mit skalarer Multiplikation $* : K \times V \to V, (a,v) \mapsto a * v$ sowie:

(a) $\forall v \in V : 1_K * v = v$
(b) $\forall a,b \in K \forall v \in V : a * (b * v) = (a * b) * v$
(c) $\forall a,b \in K \forall u,v \in V : a * (u+v) = a * u + a * v$
(d) $\forall a,b \in K \forall u,v \in V : (a+b) * v = a * v + b * v$

Untervektorräume

K-Untervektorraum U von V ist Teilmenge $U \subseteq V$ die bzgl. Addition Untergruppe von V ist und für die gilt: $\forall a \in K, u \in U : a * u \in U$ (d.h. skalare Multiplikation geschlossen)

Untervektorraumkriterium

Seien K Körper, V K-Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann ist äquivalent:

(a) U ist Untervektorraum von V
(b) $U \neq \emptyset$, $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$ und $\forall a \in K, u \in U : a * u \in U$

ϕ-invariante Unterräume

$U \subset V$ ist ϕ-invariant, wenn $\phi(U) \subset U$.

Summe

$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ist Summe von U_1 und U_2, kleinster UVR der $U_1 \cup U_2$ enthält.
$dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2)$

Direkte Summe

$U_1 + U_2$ ist direkte Summe, wenn $U_1 \cap U_2 = 0$.
d.h. gdw. der Schnitt eines UVR mit der Summe aller anderen UVR nur den Nullvektor enthält.
$dim(U_1 \oplus U_2) = dim(U_1) + dim(U_2)$

Homomorphismen

Seien V,W zwei K-Vektorräume. $\phi : V \to W$ ist Vektorraumhomomorphismus respektive K-lineare Abbildung, wenn:

(a) $\forall u,v \in V : \phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$
(b) $\forall a \in K, v \in V : \phi(a * v) = a * \phi(v)$

$Rang(\phi) := dim(Bild(\phi))$ mit $\phi \in Hom(V,W)$

Basen

Teilmenge $B \subseteq V$ ist Basis von V, wenn sich $\forall v \in V$ auf genau eine Art als Linearkombination von B schreiben lässt. Jede Basis von K^p hat genau p Elemente.

Lineare Unabhängigkeit

$\sum_{i=1}^k \lambda_i * v_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \cdots, k\} : \lambda_i = 0$

Dimension

Ist Mächtigkeit der Basis, $dim(V) := |B|$
U Untervektorraum V, dann: $dim(U) \leq dim(V)$
$dim(V) = dim(Kern(\phi)) + dim(Bild(\phi))$

Abbildungsmatrizen

$D_C(\phi(v)) = D_{CB}(\phi) * D_B(v)$

Basiswechselformel

Seien V,W K-Vektorräume; $\phi \in Hom(V,W)$; $B, \tilde{B}$ Basen von V; $C, \tilde{C}$ Basen von W. Dann gilt:
$D_{\tilde{C}\tilde{B}}(\phi) = D_{\tilde{C}C}(I_W) * D_{CB}(\phi) * D_{B\tilde{B}}(I_V)$

Dualräume

Sei V ein K-Vektorraum. Die Menge aller linearen Abbildungen $V \to K$ ist der Dualraum: $V^* := \{f : V \to K | f \text{ ist linear}\}$.
$f \in V^*$ werden als Linearformen bezeichnet.

Duale Basis

Sei $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ Basis von V, dann ist $B^* = \{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ Basis des Dualraums V^*, also die zu B von V duale Basis.
Die für b_i eindeutige Abb. $b_i^* : V \to \mathbb{K}$ erfüllt $b_i^*(b_i) = 1$ und $b_i^*(b_j) = 0$ für $j \neq i$.

Faktor- / Quotientenräume

$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$ für $v_1, v_2 \in V$ definiert Äquivalenzrelation auf K-Vektorraum V.
v_1 und v_2 sind Elemente einer Äquivalenzklasse gdw. sie sich um ein $u \in U$ unterscheiden.
$V/U := \{[v] | v \in V\}$ mit $[v] := v + U := \{v + u | u \in U\}$
$dim(V/U) = dim(V) - dim(U)$

Eigenwerte

$A * v = \lambda * v$ wobei $\lambda \in Spec(A)$ und $v \in Eig_\lambda(A)$

Eigenräume

$Eig_\lambda(A) := \{v \in K^n : A * v = \lambda * v\} = Kern(A - \lambda I_n)$

Charakteristisches Polynom

$CP_A(x) = det(x * I_n - A)$

Minimalpolynom

$MP_\phi(x)$ ist Teiler kleinsten Grades von $CP_\phi(x)$ welcher jeden Linearfaktor beinhaltet und für den noch $MP_\phi(\phi) = 0$ gilt.

Vielfachheit

$\mu_g(\phi, \lambda) := dim(Eig_\lambda(\phi))$ ist die geometrische Vielfachheit von λ.
$\mu_a(\phi, \lambda)$ ist algebraische Vielfachheit von λ, also die Vielfachheit des Linearfaktors $(x - \lambda)$ von CP_ϕ.

Diagonalisierbarkeit

$\phi \in End(V)$ ist diagonalisierbar, wenn eines aus:

(a) $\exists$ Basis B von V aus Eigenvektoren von ϕ

(b) $MP_\phi(X)$ zerfällt vollst. in Linearfaktoren

(c) $CP_\phi(X)$ zerfällt vollst. in Linearfaktoren und $\forall \lambda \in Spec(\phi) : \mu_g(\phi, \lambda) = \mu_a(\phi, \lambda)$

Diagonalisierungsverfahren

Eigenwerte und Eigenräume von ϕ bestimmen. Eigenwerte in $D_{CC}(\phi) = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eintragen. $D_{CC}(\phi)$ ist Abbildungsmatrix von ϕ bzgl. Basis C aus Eigenvektoren. $D_{BC}(Id)$ besteht aus Eigenvektoren in Spalten, $D_{CB}(Id) = D_{BC}(Id)^{-1}$.
Insgesamt: $D_{CC}(\phi) = D_{BC}(Id)^{-1} D_{BB}(\phi) D_{BC}(Id)$.

Haupträume

$H(\phi, \lambda) = Kern((\phi - \lambda * I_n)^e)$ mit $e := \mu_a(\phi, \lambda)$.
Weiterhin gilt $dim(H(\phi, \lambda)) = e$.

Bilinearformen

Paarung, Bilinearform

$P : V \times W \to K$ ist Paarung von V und W, wenn:

(a) $P(av_1 + v_2, w_1) = aP(v_1, w_1) + P(v_2, w_1)$

(b) $P(v_1, bw_1 + w_2) = bP(v_1, w_1) + P(v_1, w_2)$

für $\forall a, b \in K$; $v_1, v_2 \in V$; $w_1, w_2 \in W$. Diese Eigenschaft wird als Bilinearität von P bezeichnet.
Falls $V = W$ heißt P Bilinearform auf V.

Ausartung

Paarung P heißt nicht ausgeartet, wenn:
$\forall v \in V, v \neq 0 \exists w \in W : P(v, w) \neq 0$
$\land \forall w \in W, w \neq 0 \exists v \in V : P(v, w) \neq 0$

Orthogonalbasis

Basis $B := \{b_1, ..., b_n\}$ ist Orthogonalbasis von V bzgl. P, wenn: $\forall 1 \leq i \neq j \leq n : P(b_i, b_j) = 0$

Orthonormalbasis

Orthogonalbasis B ist Orthonormalbasis von V bzgl. P, wenn: $\forall 1 \leq i \leq n : P(b_i, b_i) = 1$

Jordansche Normalform $\tilde{A} = T^{-1} A T$

Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ bzgl. Jordanbasis

1. Eigenwerte aus char. Polynom bestimmen
2. Länge des Blocks zu Eigenwert ist $\mu_a(\lambda)$
3. Anzahl Kästchen pro Block ist $\mu_g(\lambda)$
4. Kleinstes p mit $Kern((A - \lambda I)^p) = Kern((A - \lambda I)^{p+1})$ ist Länge des größten Kästchens zu λ
5. Kästchen der Größe nach sortieren, Eigenwerte auf Hauptdiagonale
6. Anzahl der Jordankästchen mit Größe s ergibt sich aus $2a_s - a_{s-1} - a_{s+1}$ mit $a_s = dim(Kern((A - \lambda I)^s))$

Bestimmung Basiswechselmatrix T

Reichen die Eigenvektoren nicht aus, können Hauptvektoren hinzugezogen werden. Dazu wähle Hauptvektor v_1 p-ter Stufe wobei p Länge des größten Kästchens zu λ ist. v_1 kann direkt verwendet werden, weitere Vektoren ergeben sich als $v_{i+1} = (A - \lambda I) * v_i$.

Skalarprodukte

Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \langle v, w \rangle := v^T * w$

Positive Definitheit

Eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ist positiv definit, wenn:
$\forall v \in V : v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$

Skalarprodukt auf V

Ein Skalarprodukt auf V ist symmetrische, positiv definite Bilinearform. Ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt ist euklidischer Vektorraum.

Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Metrik $d(v, w) := \|v - w\|$

Komplexes Skalarprodukt

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ ist komplexes SKP, wenn:

(a) $\forall v_1, v_2, w \in V, a \in \mathbb{C}$: (linear)
$\langle av_1 + v_2, w \rangle = a\langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$

(b) $\forall v_1, v_2, w \in V, a \in \mathbb{C}$: (semilinear)
$\langle w, av_1 + v_2 \rangle = \overline{a}\langle w, v_1 \rangle + \langle w, v_2 \rangle$

(c) $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (hermitesch)

(d) $\forall v \in V \setminus \{0\} : \langle v, v \rangle > 0$

Wobei (a) und (b) Sesquilinearität, (c) Hermitizität und (d) Positivität. Ein komplexer Vektorraum mit komplexem SKP ist unitärer Vektorraum.

Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle := v^T * \overline{w} = \sum_{i=1}^n v_i * \overline{w_i}$

Fundamentalmatrix

Seien B und C Basen von V und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ SKP.

$$D_{BC}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} \langle b_1, c_1 \rangle & \ldots & \langle b_1, c_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_n, c_1 \rangle & \ldots & \langle b_n, c_n \rangle \end{pmatrix}$$

Hurwitz-Kriterium

Eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix A ist positiv definit gdw. die Determinanten aller führenden Hauptminoren positiv sind. Führende Hauptminoren sind in der oberen linken Ecke beginnende quadr. Teilmatr. von A inkl. A selbst.

Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle * \langle w, w \rangle$ (in $\mathbb{R}$)
$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle * \langle w, w \rangle$ (in $\mathbb{C}$)

Satz des Pythagoras

$\|v + w\|^2 = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle$

Orthogonalität

$v \perp w \Leftrightarrow \|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$

Orthogonalisierung mit Gram-Schmidt

Sei V euklidischer Vektorraum und $\{v_1, ..., v_k\} \subset V$ linear unabhängige Teilmenge mit k Elementen.

$$w_1 := v_1, w_l := v_l - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\langle v_l, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} * w_i \text{ (für } l = 2, ..., k)$$

Dann ist $S := \{w_1, ..., w_k\}$ Orthogonalsystem in V.
$\tilde{S} := \{\frac{1}{\|w_1\|} * w_1, ..., \frac{1}{\|w_k\|} * w_k$ ist Orthonormalsystem.
Im unitären Standardraum $\mathbb{C}^n$ ist Basis $B = \{b_1, ..., b_n\}$ ONB gdw. für Matrix A mit Basisvektoren als Spalten $A^T * \overline{A} = I_n$ gilt.

Fourierformel

Sei B ONB von V und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Paarung, dann:
$v \in V \Rightarrow v = \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle \cdot b$
Insbesondere ist v bzgl. ONB B dann:
$D_B(v) = (\langle v, b_i \rangle)_{1 \leq i \leq n}$

Orthogonalräume

Sei V euklidischer Vektorraum und $M \subseteq V$.

$$\begin{aligned} M^\perp : &= \{v \in V | \forall m \in M : m \perp v\} \\ &= \{v \in V | \forall m \in M : \langle v, m \rangle = 0\} \end{aligned}$$

$M^\perp$ ist Untervektorraum von V. Auch gilt:

(a) $N \subseteq M \Rightarrow M^\perp \subseteq N^\perp$

(b) $M^\perp = \langle M \rangle^\perp$

Orthogonales Komplement

Sei U Untervektorraum von euklidischem Raum V, dann $U^\perp$ orthogonales Komplement zu U.
Entsprechend gilt: $V = U \oplus U^\perp$

Orthogonale Projektionen

Definition $\Pi_U : V \to U, u + u^\perp \mapsto u$

Bestimmung $\Pi_U(a) = \sum_{i=1}^n \langle a, u_i \rangle u_i$

Abstand $d(a, U) = \|u^\perp\| = \|a - \Pi_U(a)\|$

Orthogonale Matrizen

A heißt orthogonal, wenn $A^T A = I$ gilt.
A ist orthogonale Matrix $\Rightarrow det(A) = \pm 1$
$\forall \lambda \in Spec(A) : \lambda = \pm 1$
Orthogonale Matrizen sind normal.

Unitäre Matrizen

A heißt unitär, wenn $\overline{A^T}A = I$ gilt.
A ist unitäre Matrix $\Rightarrow |det(A)| = 1$
$\forall \lambda \in Spec(A) : |\lambda| = 1$
Unitäre Matrizen sind normal.

Iwasawa- / QR-Zerlegung

Zerlegung von $A \in GL_n(\mathbb{K})$ in das Produkt aus einer orthogonalen bzw. unitären Matrix und einer oberen Dreiecksmatrix. $A = Q \cdot R$.

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ q_1 & \dots & q_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\tilde{q}_1\| & \langle q_1, a_2 \rangle & \dots & \langle q_1, a_n \rangle \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle q_{n-1}, a_n \rangle \\ 0 & \dots & 0 & \|\tilde{q}_n\| \end{pmatrix}$$

1. Spalten von A orthonormalisieren
2. Q sind die orthonormalisierten Spalten von A
3. Beträge der orthogonalen aber nicht normalisierten Spalten von A bilden Hauptdiagonale von R
4. Skalarprodukte von Spalten Q mit Spalten A bilden obere Dreieckswerte

Isometrien

Für metrische Räume (X,d) und (Y,e) ist $\phi : X \to Y$ eine Isometrie oder abstandserhaltende Abbildung, wenn:
$\forall x_1, x_2 \in X : d(x_1, x_2) = d(\phi(x_1), \phi(x_2))$
$Iso(X,d)$ ist die Menge aller invertierbaren Isometrien von X nach X.

Lineare Isometrien

Es seien V, W euklidische oder unitäre Vektorräume. Dann ist Isometrie $\phi : V \to W$, die gleichzeitig lineare Abbildung ist, eine lineare Isometrie.

Eigenwerte von Isometrien

Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt, dann:

(a) ϕ ist lineare Isometrie von V, dann $\forall \lambda \in Spec(\phi) : |\lambda| = 1$
(b) $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| = 1 \wedge V \neq \{0\}$, dann gibt es Isometrie von V mit Eigenwert α

Isometrien und Orthonormalbasen

Sei V endl. dim. VRaum mit SKP, $\phi \in End(V)$ und B ONB, dann:

$$\begin{aligned} \phi \text{ ist Isometrie } &\Leftrightarrow \phi(B) \text{ ist ONB von } V \\ &\Leftrightarrow D_{BB}(\phi) \text{ orthogonal / unitär} \end{aligned}$$

Isometrienormalform

Sei $A \in U(n)$, dann gibt es $S \in U(n)$, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix.
Sei $A \in O(n)$, $d_+ := dim(Eig(A,1))$, $d_- := dim(Eig(A,-1))$ und $l = \frac{1}{2}(n - d_+ - d_-)$, dann existiert $S \in O(n)$, sodass $S^{-1}AS$ die folgende Blockgestalt hat:

$$\begin{pmatrix} I_{d_+} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_{d_i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & D_{\psi_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D_{\psi_l} \end{pmatrix}$$

Wobei $D_{\psi_i} = \begin{pmatrix} cos(\psi_i) & -sin(\psi_i) \\ sin(\psi_i) & cos(\psi_i) \end{pmatrix}$ Drehkästchen.

Bestimmung Isometrienormalform

1. Reelle und komplexe Eigenwerte bestimmen
2. Hauptdiagonale mit reellen Eigenwerten entsprechend μ_a befüllen
3. Drehkästchen abhg. der komplexen Eigenwerte bestimmen wobei $cos(\psi)$ dem reellen und $sin(\psi)$ dem komplexen Anteil enstspricht
4. S wird aus Orthonormalbasen der Eigenräume zusammengesetzt

Selbstadjungierte Abbildungen

Sei V Vektorraum mit SKP über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\phi \in End(V)$. Dann ist ϕ selbstadjungiert, wenn für $\forall v, w \in V$ gilt: $\langle \phi(v), w \rangle = \langle v, \phi(w) \rangle$.
ϕ ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow D_{BB}(\phi) = \overline{D_{BB}(\phi)^T}$
Orthogonale Projektion π ist selbstadjungiert.

Hermitesche Matrizen

$A^* := \overline{A^T}$, $A = A^* \Leftrightarrow A$ ist hermitesch

Normale Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dann: $A^* \cdot A = A \cdot A^*$
Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann: $B^T \cdot B = B \cdot B^T$
Normale Matrizen sind unitär diagonalisierbar.

Symmetrische reelle Matrizen

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte.
Es existiert eine orthogonale Matrix $S \in O(n)$ so, dass $D_A = S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Spektralsatz

Sei V Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit SKP und $\phi \in End(V)$. Dann ist äquivalent:

(a) ϕ ist selbstadjungiert
(b) Es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von ϕ und $Spec(\phi) \subset \mathbb{R}$

Positivität

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit gdw. $\forall \lambda \in Spec(A) : \lambda \geq 0$

Affine Räume

Sei V ein K-Vektorraum, $A \neq \emptyset$ und $\tau : V \times A \to A$. Dann ist (A, V, τ) ein affiner Raum mit Translationsvektorraum V und Addition τ, wenn:

(a) $\forall P \in A : \tau(0, P) = P$
(b) $\forall P \in A \forall v_1, v_2 \in V :$
$\tau(v_1, \tau(v_2, P)) = \tau((v_1 + v_2), P)$
(c) $\forall P, Q \in A \exists! v \in V : \tau(v, P) = Q$

Hinweis: A kann aber muss kein Vektorraum sein.

Affine Teilräume

$A := v + W$ ist affiner Teilraum von V mit $W \leq V$ Vektorräume und $v \in V$. Dies entspricht dem nichtleeren Lösungsraum $\mathcal{L}(A, b)$ eines LGS.

Lot, Lotfußpunkte

Seien $A = x_0 + \langle x_1, ..., x_r \rangle$, $B = y_0 + \langle y_1, ..., y_s \rangle$ affine UR, das Lot ist die Strecke zwischen den Lotfußpunkten.
Sei $C = (x_1, ...x_r, y_1, ...y_r)$, dann ergibt die Lösung $z = (-\lambda_1, ..., -\lambda_r, \mu_1, ..., \mu_s)^T$ von $C^T Cz = C^T(x_0 - y_0)$ die Lotfußpunkte $P = x_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i$ und $Q = y_0 + \sum_{i=1}^s \mu_1 y_i$. Weiterhin ist $d(A, B) = d(P, Q)$.

Affine Geraden

Seien $a, b \in V$, dann ist die affine Gerade durch a und b: $\overline{a, b} := \{\lambda a + (1 - \lambda) b | \lambda \in K\} = a + K * (b - a)$
Für $K = \mathbb{R}$ und $a, b \in V$ wobei V $\mathbb{R}$-Vektorraum:
$[a, b] := \{\lambda a + (1 - \lambda) b | 0 \leq \lambda \leq 1\}$ (Strecke $\overrightarrow{ab}$)

Affine Abbildungen, Affinitäten

Seien A, B affine Räume mit Translationsvektorräumen V und W über $\mathbb{K}$. Abbildung $\phi : A \to B$ induziert für gewähltes $a \in A$ eine Abbildung $\varphi : V \to W$ mit $\phi(v + a) = \varphi(v) + \phi(a)$.
ϕ heißt affiner Homomorphismus falls φ ein Vektorraumhomomorphismus ist. Invertierbares ϕ heißt Affinität.

Affiner Standardraum $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$

Alle affinen Selbstabbildungen des affinen Standardraums haben die Gestalt $\phi : A \to A$ mit $\phi(a) := M \cdot a + t$ für bel. $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $t \in \mathbb{K}^n$.

Euklidischer Raum

Ist A affiner Raum mit $\mathbb{R}$-Vektorraum V als euklidischen Translationsvektorraum, dann ist A ein euklidischer Raum.

Quadriken

Eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{K}^n$ ist $Q := \{v \in \mathbb{K}^n | F(v) = 0\}$ wobei $F \in \mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$ quadratisches Polynom.

Matrizenform

Das eine Quadrik Q definierende quadratische Polynom lässt sich wie folgt darstellen:
$F(x) = x^T Ax + b^T x + c$ mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{K}^n$
Für $char(\mathbb{K}) \neq 2$ ist A symmetrisch.

Affine Normalform

Ziel der Bestimmung einer möglichst einfachen affinen Normalform $\tilde{Q}$ von Q sowie einer Affinität φ welche Q in diese Normalform überführt.

1. $F(x)$ als $F(x) = x^T Ax + 2b^T x + \gamma$ schreiben
2. A diagonalisieren mit $\tilde{A} = C^T AC$
3. Bestimme Mittelpunkt d in $A \cdot d = -b$
4. Bestimme konstanten Term $F(d)$
5. $\varphi(x) = Cx + d$ ist gesuchte Affinität
6. $\tilde{F}(x) = (F \circ \varphi)(x) = x^T \tilde{A} x + F(d)$ durch konstanten Term teilen um $\tilde{Q}$ zu erhalten.

Somit wird $F(x) = x^T Ax + 2b^T x + \gamma$ mittels $\varphi(x) = Cx + d$ in $(F \circ \varphi)(x) = x^T \tilde{A} x + 2\tilde{b}^T x + \tilde{\gamma}$ überführt. Dabei gilt $\tilde{A} = C^T AC$, $\tilde{b} = C^T(Ad + b)$ und $\tilde{\gamma} = F(d)$.

Euklidische Normalform

Ähnlich affiner Normalform, Transformation nur mit Isometrie $\varphi(x) = Cx + d$ wobei $C \in O(n)$ also Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von A.

1. $F(x)$ als $F(x) = x^T Ax + 2b^T x + \gamma$ schreiben
2. A diagonalisieren mit $\tilde{A} = C^T AC$
   (i) Eigenwerte, -vektoren von A bestimmen
   (ii) Eigenvektoren orthonormalisieren
   (iii) Orthonormalisieren benötigt hier nur Normalisieren da die Orthogonalität zwischen Eigenvektoren verschiedener Eigenwerte bei Selbstadjungiertheit von A gegeben ist
3. Alles weitere analog zu affiner Normalform