Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$$

Die Normen von $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$ stimmen überein, ebenso Konvergenz-, Stetigkeits- und Offenheitseigenschaften:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ in } \mathbb{C} \iff \lim_{n\to\infty} Re\, z_n = Re\, z \land \lim_{n\to\infty} Im\, z_n = Im\, z$$

Polardarstellung

Für $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $z = re^{i\phi}$ mit $r = |z|$ und:

$$\phi = \arg z := \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & y > 0 \\ 0 & x \in (0, +\infty) \\ -\arccos \frac{x}{r} & y < 0 \\ \pi & z \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

mit $\phi \in (-\pi, \pi]$. Es gilt für $z = re^{i\phi}, w = se^{i\psi}$:

$$z \cdot w = rse^{i(\phi+\psi)} = |z||w|e^{i(\phi+\psi)}$$

Holomorphie

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist *komplex differenzierbar* in $z_0 \in D$, wenn:

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0, z\in D\setminus\{z_0\}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \text{ existiert.}$$

Ist f in $\forall z_0 \in D$ komplex differenzierbar, so heißt f *holomorph* auf D mit Ableitung $f' : D \to \mathbb{C}$. Geschrieben $f \in H(D)$.

Komplexe Ableitung

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1$ und $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z$ sind holomorph.
Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) \in D' \subseteq \mathbb{C}$ offen, $h : D' \to \mathbb{C}$ in $f(z_0)$ komplex differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$$
$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$$
$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))f'(z_0)$$

Polynome p und nichtsinguläre rationale Funktionen aus Polynomen sind auf $\mathbb{C}$ holomorph.

Konvergenzradius

Seien $a_k \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}_0$:

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0, +\infty]$$

ist der *Konvergenzradius*.
Sei $\rho > 0, c \in \mathbb{C}$. Dann ex. die Potenzreihe: $f : B(c, \rho) \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k$.
Diese ist auf $B(c, \rho)$ beliebig oft komplex differenzierbar. Für $n \in \mathbb{N}_0$ hat $f^{(n)}$ den Konvergenzradius $\rho > 0$ und es gilt für $z \in B(c, \rho)$:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(z-c)^{k-n}$$

Auf diese Weise ergeben sich für $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

Übliche Ableitungs- und Rechenregeln gelten.

Charakterisierung

Sei $f : D \to \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{R}^2, u = Re\, f, v = Im\, f : D \to \mathbb{R}$.
$f : D \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto u(x, y) + iv(x, y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$
Es sind dann äquivalent:

(a) f ist in z komplex differenzierbar
(b) f ist in z reell differenzierbar und es gelten die *Cauchy-Riemannschen DGL*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

f hat in $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ die *Jacobimatrix*:

$$f'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$$

Entsprechend ist $f(z) = \overline{z}$ nirgends komplex differenzierbar, $f(z) = |z|^2$ nur in 0 komplex differenzierbar und $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Biholomorphie

Sind $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer, $f : U \to V$ bij., f und f^{-1} holomorph. Dann heißt f *biholomorph*, U und V *konform äquivalent*.
Sei $f : U \to V$ biholomorph, $z \in U$.
Dann ist $f'(z) \neq 0$ und für $w = f(z)$ gilt:

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} = \frac{1}{f'(z)}$$

Weiterhin existieren offene nichtleere $U \subseteq D$ mit $u_0 \in U, V \subseteq \mathbb{C}$ s.d. $f\big|_U$ biholomorph ist, wenn $f \in H(d) \cap C^1(D, \mathbb{R}^2)$, $z_0 \in D$ mit $f'(z_0) \neq 0$ gilt.

Wurzeln und Exponentiale

Die k-te Wurzel aus $w \in \mathbb{C}$ ist def. als:

$$z_k := \sqrt[k]{|w|} \exp\left(\frac{i}{k}(\arg\, w + 2k\pi)\right)$$

Sei $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Dann:

$$\exp(z) = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$
$$\exp(z) = \exp(z + 2\pi i k)$$
$$\exp(z) = 1 \iff z = 2\pi i k$$

Logarithmen und Potenzen

$z \in \mathbb{C}$ ist *Logarithmus* von $w \in \mathbb{C}$ gdw.:

$$\exists k \in \mathbb{Z} : z = \log|w| + i \arg\, w + 2k\pi i$$

Hauptwert des Logarithmus von $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\text{Log}\, w := \log|w| + i \arg w$$

Allgemeine Potenz

Sei $z = re^{i\phi} \in \Sigma_\pi$ mit $r > 0$ und $\phi \in (-\pi, \pi), w = x + iy \in \mathbb{C}$ für $x, y \in \mathbb{R}$. *Allgemeine Potenz* ist def.:

$$z^w = \exp(w \log z) = r^x e^{-y\phi} e^{i(x\phi + y \ln r)}$$

z.B. $e^w = \exp(w)$ und $i^i = e^{-\pi/2}$.

Es gilt $z^{v+w} = z^v z^w$. Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z} z^w = wz^{w-1}$ und $\frac{\partial}{\partial w} z^w = \log(w) z^w$ existieren.

Komplexe Kurvenintegrale

Fkt $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist *stückweise stetig*, wenn $\forall t \in [a, b]$ beideitige Grenzwerte in $\mathbb{C}$ ex. und max. endlich viele Unstetigkeitspunkte $t_k \in [a, b]$ ex.
Geschrieben $f \in PC([a, b], \mathbb{C})$.
Solche Funktionen sind integrierbar:

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \text{Re } f(t)dt + i \int_a^b \text{Im } f(t)dt \in \mathbb{C}$$

Hauptsatz

$f \in PC([a, b], \mathbb{C})$ ist in $t_0 \in [a, b]$ differenzierbar, wenn $f'(t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{C}$ existiert.
$\iff$ Re f, Im f besitzen Ableitungen in $\mathbb{R}$.
Ist f auf $[a, b]$ diffbar und $g, f' \in C([a, b], \mathbb{C})$.
Dann gilt der Hauptsatz:

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$
$$\exists \frac{d}{dt} \int_a^t g(s)ds = g(t) \text{ für } t \in [a, b]$$

Kurven und Parametrisierungen

$\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ ist *Kurve* oder *Weg* von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. γ ist *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt und einfach, wenn γ auf $[a, b)$ injektiv ist.
$\Gamma = |\gamma| = \gamma([a, b])$ ist *Bild* oder *Spur* von γ.
Gilt $\Gamma \subseteq M \subseteq \mathbb{C}$, so ist γ Weg in M.
γ ist auch *Parametrisierung* ihres Bildes Γ.

Kurvenintegral

Sei $\gamma \in PC^1([a, b], \mathbb{C})$ mit Bild $\Gamma = \gamma([a, b])$ und $f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$. Dann ist das *komplexe Kurvenintegral*:

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Die Länge von γ ist $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.

Eigenschaften

Seien $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in PC^1([a, b], \mathbb{C})$ mit Bildern $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ und $f, g \in C(\Gamma, \mathbb{C}), h \in C(\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \mathbb{C}), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

(a) $\int_\gamma (\alpha f + \beta g)dz = \alpha \int_\gamma f dz + \beta \int_\gamma g dz$
(b) $|\int_\gamma f dz| \leq \|f\|_\infty l(\gamma)$
(c) $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} h dz = \int_{\gamma_1} h dz + \int_{\gamma_2} h dz$
(d) $\int_{\gamma^-} f dz = -\int_\gamma f dz$

Sei $\gamma \in PC^1([a, b], \mathbb{C})$ mit Bild Γ, $f_n, f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ für $n \in \mathbb{N}$ und $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann gelten:

(f_n) konv. glm. auf Γ gegen f

$$\implies \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma f dz$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konv. glm. auf Γ

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n dz$$

Abbildung $H : z \mapsto \int_\Gamma h(z,w)dw \in C(D,\mathbb{C})$

$z \mapsto h(z,w) \in H(D)$ mit $\frac{\partial}{\partial z} h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$

$$\implies \frac{d}{dz}\int_\gamma h(z,w)dw = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} h(z,w)dw$$

d.h. H ist holomorph mit dieser Ableitung.

Konstant auf Gebieten

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(D)$ und $f' = 0$ auf D. Dann ist f konstant.

Stammfunktionen

Sei $f \in C(D,\mathbb{C})$. Stammfunktion von f auf D ist $F \in H(D)$ mit $F' = f$.
$\exp, \sin, \cos$ und Polynome besitzen Stammftk. auf $\mathbb{C}$. $\log$ ist Stammfkt. von $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf Σ_π.

Der Cauchysche Integralsatz

Sei D Gebiet, $f \in C(D,\mathbb{C})$. Dann sind äquivalent:

(a) f hat Stammfunktion F auf D

(b) $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in PC^1([a,b],D)$ mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ und $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ gilt: $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$.

(c) $\forall \gamma \in C^1([a,b],D)$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$: $\int_\gamma f dz = 0$

Es ergibt sich für jeden stückweisen C^1-Weg in D: $\int_\gamma f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Satz von Goursat

Seien $w_0 \in D, f \in C(D,\mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$ und $\Delta \subseteq D$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann:

$$\int_{\partial\Delta} f dz = 0$$

Cauchys Integralsatz

Seien D sternförmiges Gebiet, $f \in H(D)$ und $\gamma \in PC^1([a,b],D)$ geschlossen, dann gilt:

$$\int_\gamma f dz = 0$$

Dies gilt auch für $f \in C(D,\mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{\omega_0\})$.

Cauchys Integralformeln

Seien $f \in H(D), \overline{B}(z_0,r) \subseteq D, n \in \mathbb{N}_0, z \in B(z_0,r)$ und $s := |z - z_0| < r$. Sei $\partial B(z_0,r)$ durch $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ mit $t \in [0,2\pi]$ parametrisiert.
Dann ist f bel. oft auf D diffbar und es gelten:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n! r}{(r-s)^{n+1}} \max_{|w-z_0|=r} |f(w)|$$

Analytische Funktionen

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, wenn $\forall z \in D \exists r(z) > 0$ mit $B(z,r(z)) \subseteq D$ s.d. f auf $B(z,r(z))$ gleich einer Potenzreihe um z ist.

Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ heißt *ganz*.

Analytische Funktionen sind insb. holomorph.

Entwicklungssatz

Sei $f \in H(D)$. Dann ist f analytisch.

Für $\forall z_0 \in D$ sei $R(z_0) := \sup\{r > 0 | B(z_0,r) \subseteq D\}$ der maximale Radius. Zusätzlich sei $\overline{r}, r \in (0, R(z_0))$. Für $z \in B(z_0, R(z_0))$ ist die Taylorreihe von f:

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Diese konvergiert gleichmäßig auf $\overline{B}(z_0,\overline{r})$.
Für ganze f gilt $R(z_0) = \infty$.

Satz von Morera

Funktion $f \in C(D,\mathbb{C})$ erfülle $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$ für alle abg. $\Delta \subseteq D$. Dann ist f holomorph.

Satz von Liouville

Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Fundamentalsatz der Algebra

Ein komplexes Polynom n-ten Grades hat n Nullstellen in $\mathbb{C}$. (eventuell wiederholt)

Weierstraßscher Konvergenzsatz

Seien $f, f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die *Supremumsnorm* $\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)|$ auf bel. komp. $K \subseteq D$ gegen 0 für $n \to \infty$, so konvergiert (f_n) kompakt auf D gegen f. Weiterhin:

$$f_n \in C(D,\mathbb{C}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{kompakt}} f \implies f \in C(D,\mathbb{C}).$$

Eine Folge $(f_n) \in H(D)$ konvergiere kompakt gegen f. Dann ist f holomorph und alle $f_n^{(j)}$ konvergieren kompakt auf D gegen $f^{(j)}$ für $n \to \infty$.

Identitätssatz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f \in H(D)$. Dann sind äquiv.:

(a) $f = 0$ auf D

(b) $\exists z_0 \in D \forall n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z_0) = 0$

(c) $\exists z_n, z_0 \in D \forall n \in N : f(z_n) = 0 \wedge z_n \ne z_0$
Weiterhin gilt $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$

Somit sind $g, h \in H(D)$ schon auf D gleich, wenn g, h auf Menge $M \subseteq D$ mit Häufungspunkt $z_0 \in D$ übereinstimmen.

Nullstellensatz

Sei $f \in H(D) \ne$ Nullfkt. und $\exists z_0 \in D : f(z_0) = 0$. Dann $\exists m \in \mathbb{N}, r > 0$ mit $B(z_0,r) \subseteq D$ und $g \in H(B(z_0,r))$ mit $g(z_0) \ne 0$ s.d. für $z \in B(z_0,r)$ gilt:

$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0), f^{(m)}(z_0) \ne 0$$

$f(z) = (z-z_0)^m g(z)$

Dabei ist m die Ordnung der Nullstelle z_0.

Holomorphe Fortsetzung

Sei $f \in H(D), U \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet mit $D \subseteq U$.
Dann $\exists! g \in H(U) : g\big|_D = f$.

Die *Gammafunktion* $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, Re\ z > 0$ hat genau eine holomorphe Fortsetzung auf der Menge $\mathbb{C} \setminus \{-n | n \in \mathbb{N}_0\}$.

Nullstelle in $B(z_0,r)$

Sei $f \in H(D), B := B(z_0,r), r > 0, \overline{B} \subseteq D$. Weiter:

$$0 \le |f(z_0)| < \min_{x \in \partial B} |f(x)|$$

Dann hat f Nullstelle in B.

Offenheitssatz

$f \in H(D)$ ist auf kleiner Kugel in D konstant
$\implies \forall$offene $U \subseteq D : f(U) \subseteq \mathbb{C}$ ist offen.

Gebietstreue

$D \subseteq \mathbb{C}$ ist Gebiet und $f \in H(D)$ ist nicht konstant
$\implies f(D)$ ist ein Gebiet.

Maximumsprinzip

Sei D Gebiet, $f \in H(D)$ nicht konstant. Dann:

(a) Die Abbildung $D \to \mathbb{R}, z \mapsto |f(z)|$ hat kein lokales Maximum

(b) D beschränkt, $f \in C(\overline{D},\mathbb{C})$. Dann: $\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|$

Homologie

Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ stckw. stg. Wege in $\mathbb{C}$). Die *Kette* $\Gamma := \gamma_1 \oplus \cdots \oplus \gamma_m$ ist $\forall f \in C(|\Gamma|)$ def. als:

$$\int_\Gamma f dz := \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f dz$$

Für Träger $|\Gamma| = \Gamma(I) \subseteq D$ ist Γ Kette in D.
Sind alle γ_j geschlossen heißt Γ *Zyklus*.
Die *Umlaufzahl* eines Zyklus Γ um $\alpha \in \mathbb{C} \setminus |\Gamma|$:

$$n(\Gamma,\alpha) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-a} dz = \sum_{j=1}^m n(\gamma_j, \alpha)$$

Γ ist *nullhomolog* in D gdw. $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus D : n(\Gamma,\alpha) = 0$
Γ_1 und Γ_2 sind *homolog* in D gdw. $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus D$: $n(\Gamma_1,\alpha) = n(\Gamma_2,\alpha)$
D ist *einfach zusammenhängend* gdw. jeder Zyklus in D nullhomolog ist.

Homologe Variante der Cauchyschen Sätze

Sei $f \in H(D)$,, Γ nullhomologer Zyklus in D und Γ_1, Γ_2 homologe Zyklen in D. Dann gilt:

(a) $\int_\Gamma f dz = 0$

(b) $\int_{\Gamma_1} f dz = \int_{\Gamma_2} f dz$

(c) $f(z) n(\Gamma,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dz$ für $z \in D \setminus |\Gamma|$

Cauchy für einfach zshg. Gebiete

Sei D einfach zshg. und Γ Zyklus in D. Dann:

(a) $\int_\Gamma f dz = 0$

(b) Für $z \in D \setminus |\Gamma|, n \in \mathbb{N}_0$:
$f^{(n)}(z) n(\Gamma,z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$

Homotopie

Sei $N \subseteq M$ und M ein metrischer Raum,
$\gamma_0, \gamma_1 \in C([a,b],M)$ geschlossene Wege in N.

Die Wege γ_0, γ_1 heißen *homotop* über N, wenn $\exists h \in C([0,1] \times [a,b], M) \forall (s,t) \in [0,1] \times [a,b] : h(s,t) \in N \wedge h(0,t) = \gamma_0(t) \wedge h(1,t) = \gamma_1(t) \wedge h(s,a) = h(s,b)$.

Ist γ_1 konstant, so heißt γ_0 *nullhomotop* über N.
Man schreibt $\gamma_0 \sim_N \gamma_1$ bzw. $\gamma_0 \sim_N 0$.

Sind alle geschlossenen stückweisen C^1-Wege in N nullhomotop, so heißt N *einfach zusammenhängend*.

Homotopie impliziert Homologie.

Homotope Variante der Cauchyschen Sätze

Sei D Gebiet, $f \in H(D), \gamma_0, \gamma_1$ auf D homotope stückweise C^1-Wege. Dann:

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz$$

Insb. gilt $\int_{\gamma_0} f\,dz = 0$, wenn $\gamma_0 \sim_D 0$.
Cauchys Integralsatz gilt auf einfach zusammenhängenden Gebieten in D.

Sei $\overline{B}(z_0,r) \subseteq D, r > 0, z \in B(z_0,r), k(t) = z_0 + re^{it}$ für $t \in [0,2\pi], n \in \mathbb{N}_0$ und γ zu k auf $D \setminus \{z\}$ homotoper stückweiser C^1-Weg. Dann:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

Isolierte Singularitäten

Sei $z_0 \in \mathbb{C}, f \in H(D \setminus \{z_0\}), D_0 := B(z_0,r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$.
Dann ist z_0 *isolierte Singularität* von f. f ist:

(a) *hebbar*, wenn $\exists \tilde{f} \in H(B(z_0,r)) : f\big|_{D_0} = \tilde{f}\big|_{D_0}$

(b) *Pol*, wenn $f(z) \to \infty\ (z \to z_0)$

(c) *wesentlich*, wenn z_0 nicht hebbar / Pol ist

Charakterisierung

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ isolierte Singularität von $f \in H(D)$. Dann sind äquivalent:

(a) z_0 ist Pol von f

(b) $\exists r, c_1, c_2 > 0, m \in \mathbb{N} : \tilde{D} := B(z_0,r) \setminus \{z_0\} \subseteq D \land \forall z \in \tilde{D} : c_1|z-z_0|^{-m} \leq |f(z)| \leq c_2|z-z_0|^{-m}$

(c) $\exists r > 0, m \in \mathbb{N}, g \in H(B(z_0,r)) :$
$\tilde{D} := B(z_0,r) \setminus \{z_0\} \subseteq D \land g(z_0) \neq 0 \land \forall z \in \tilde{D} :$
$f(z) = (z-z_0)^{-m} g(z)$

(d) $\exists r > 0 : \tilde{D} := B(z_0,r) \setminus \{z_0\} \subseteq D \land \forall z \in \tilde{D} : f(z) \neq 0 \land h_0 := \frac{1}{f} : \tilde{D} \to \mathbb{C}$ besitzt Fortsetzung $h \in H(B(z_0,r))$ wobei h in z_0 Nullstelle m-ter Ordnung hat

Riemannscher Hebbarkeitssatz

Die isolierte Singularität $z_0 \in \mathbb{C}$ von $f \in H(D)$ ist hebbar $\iff \exists r_1 > 0 : B(z_0,r_1) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ und f auf $B(z_0,r_1) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.

Satz von Casorati-Weierstraß

z_0 ist wesentlich $\iff \forall r > 0 :$
Bild $f(B(z_0,r) \setminus \{z_0\})$ liegt dicht in $\mathbb{C}$

Biholomorphie aus Injektivität

Sei $f \in H(D)$ injektiv.
Dann ist $f(D) \subseteq \mathbb{C}$ offen und f ist biholomorph.

Laurentreihe

Sei $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{C}$.
$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z-c)^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ ist die *Laurentreihe*.
Diese konvergiert, falls Grenzwerte in $\mathbb{C}$ ex.:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n \qquad \text{(regulärer Anteil)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-c)^{-n} \qquad \text{(singulärer Anteil)}$$

Ist dies der Fall, wird definiert:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-c)^n := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-c)^{-n}$$

Satz von Laurent

Seien $f \in H(D), n \in \mathbb{Z}, z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ s.d. $D_0 := B(z_0,R) \setminus \{z_0\} \subseteq D$.
Für $r \in (0,R)$ sei $\gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + re^{it}$ und:

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Diese Koeff. sind eindeutig und unabhg. $r \in (0,R)$.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert dann absolut und gleichmäßig auf Kompakta in D_0 gegen f.

Singularitäten der Laurentreihe

Für Laurentreihen nach der obigen Def. gelten:

(a) z_0 ist hebbar $\iff \forall n < 0 : a_n = 0$

(b) z_0 ist Pol m-ter Ordnung
$\iff a_{-m} \neq 0 \land \forall n < -m : a_n = 0$

(c) z_0 ist wesentlich $\iff \exists n_j \to -\infty : a_{n_j} \neq 0$

Residuen

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ isolierte Singularität von $f \in H(D)$ und a_n Koeffizienten der Laurentreihe von f um z_0.
Das *Residuum* von f bei z_0 ist definiert als:

$$\text{Res}(f,z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} f(w)dw$$

Hierbei gelte $\overline{B}(z_0,r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$.

Residuensatz

Seien $f \in H(D)$ und $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ alle isolierten Singularitäten von f. Sei p ein geschlossener, einfacher, positiv orientierter Polygonzug in D mit Bild P s.d. alle z_j im von P umschlossenen Gebiet G liegen und $\overline{G} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq D$ ist. Weiterhin sei $\gamma \in PC^1([a,b],D)$ zu p auf D homotop. Dann:

$$\int_\gamma f\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f,z_j) n(|\gamma|, z_j)$$

Residuen von Polen m-ter Ordnung

Sei z_0 Pol m-ter Ordnung von $f \in H(D)$ und g die holomorphe Fortsetzung von $(z-z_0)^m f(z)$ auf $B(z_0,r) \subseteq D$. Dann gelte:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f,z_0) &= \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} ((z-z_0)^m f(z)) \end{aligned}$$

Insb. gilt also für $m = 1$:

$$\text{Res}(f,z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$$

Argumentprinzip

Sei D Gebiet, $f \in H(D), \gamma \in PC^1(D)$ geschlossener Weg mit Umlaufzahl $n(\gamma,a) \in \{0,1\}$ für $a \in D \setminus |\gamma|$, γ nullhomolog in D, $\forall z \in |\gamma| : f(z) \neq 0$ und $D_1 := \{a \in D | n(\gamma,a) = 1\}$. Dann gilt:

$$N(f,D_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Hierbei ist $N(f,D_1)$ die Anzahl Nullstellen von f in D_1 inklusive deren Vielfachheiten.

Satz von Rouché

Seien D, f, γ, D_1 wie im Argumentprinzip und $g \in H(D)$ s.d. $\forall z \in |\gamma| : |f(z) - g(z)| < |g(z)|$. Dann gilt:

$$N(f,D_1) = N(g,D_1)$$

Satz von Hurwitz

Sei D ein Gebiet und $(f_n) \subseteq H(D)$ Folge mit $Z(f_n) := \{z \in \mathbb{C} | f(z_n) = 0\} = \emptyset$ s.d. (f_n) auf D lokal glm. gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert.
Dann gilt $Z(f) = \emptyset \lor Z(f) = D$.