Anfangswertprobleme

Seien $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in \mathcal{J}$ mit $t_0 < \sup \mathcal{J}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C(\mathcal{J} \times D, \mathbb{R}^m)$ und $u_0 \in D$.

$$u'(t) = f(t, u(t)),\ t \geq t_0,\ t \in \mathcal{J}$$
$$u(t_0) = u_0$$

Für das AWP wird ein $t_1 \in \mathcal{J}$ mit $t_1 > t_0$ und eine Lösung $u \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ auf $[t_0, t_1]$ gesucht.

Lipschitz-Stetigkeit

$$\exists L > 0 \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m : \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

Lokale Lipschitz-Stetigkeit

$$\exists \delta > 0 \exists L > 0 \forall \overline{x} \in U_\delta(x) : \|f(x) - f(\overline{x})\| \leq L\|x - \overline{x}\|$$

Kriterium für lokale Lipschitz-Stetigkeit

Sei $f \in C(\mathcal{J} \times D, \mathbb{R}^k)$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und:
$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \exists \partial_{x_j} f \in C(\mathcal{J} \times D, \mathbb{R}^k)$
Dann ist f lokal Lipschitz in x.

Picard-Lindelöf (lokal)

Seien $\mathcal{J}$ Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C(\mathcal{J} \times D, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x, $u_0 \in D$, $t_0 \in \mathcal{J}$ mit $t_0 < \sup \mathcal{J}$. Dann gelten:

(a) $\exists t_1 > t_0$ mit $t_1 \in \mathcal{J}$ und eind. Lsg. u auf $[t_0, t_1]$ von $u'(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$

(b) $u'(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ besitze zwei Lsg. v_1 und v_2 auf $[t_0, T_1] \subseteq \mathcal{J}$ bzw. $[t_0, T_2] \subseteq \mathcal{J}$. Dann stimmen v_1 und v_2 auf $[t_0, T_3]$ mit $T_3 = \min\{T_1, T_2\}$ überein.

Picard-Lindelöf (maximal)

Unter den Voraussetzungen von Picard-Lindelöf (lokal) sei $u_0 \in D$, dann gilt:

(a) $\exists$ max. Existenzzeit $\overline{t}(u_0) \in (t_0, \sup \mathcal{J}]$ und eine eindeutige maximale Lösung u von $u'(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ auf $[t_0, \overline{t}(u_0))$

(b) Wenn $\overline{t}(u_0) < \sup \mathcal{J}$, dann $\exists t_n \in (t_0, \overline{t}(u_0))$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \overline{t}(u_0)$ so, dass die Blow-Up Bedingung erfüllt ist: $\lim_{n\to\infty} |u(t_n)|_n = \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} \inf_{x \in \partial D} |u(t_n) - x|_2 = 0$

Trennung der Variablen

Sei $u'(t) = g(t)h(u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ ein AWP mit $g \in C(\mathbb{R})$, $h \in C((a,b), \mathbb{R})$, $u_0 \in (a, b)$ und $h(u_0) \neq 0$. u ist Lösung, wenn:
$\forall t \in \mathcal{J} : u(t) \in (a, b)$, $u \in C^1(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ und $t_0 \in \mathcal{J}$.

$$u \text{ ist Lösung } \Rightarrow \int_{t_0}^{t} g(s)ds = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{h(x)} dx$$

Lemma von Grönwall

Seien $b \in [0, \infty]$, $\phi \in C([0, b), \mathbb{R})$ und $\alpha, \beta \geq 0$.

$$\psi(t) := \alpha + \beta \int_0^t \phi(s)ds \text{ für } t \in [0, b)$$

Weiter gelte $\phi \leq \psi$ auf $[0, b)$. Dann gilt:

$$\forall t \in [0, b) : \phi(t) \leq \alpha \exp(\beta t)$$

Eindeutige Lösbarkeit

Sei $D = (a, b) \times \mathbb{R}^m$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f : D \to \mathbb{R}^k$ erfülle die Vor. von Picard-Lindelöf. Gilt weiter $\|f(t, x)\| \leq \alpha + \beta\|x\|$ für $\alpha, \beta \geq 0$, dann ist das AWP auf (a, b) eindeutig lösbar.

Autonome DGL

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^p$ und $g : D \to \mathbb{R}^p$.
Die DGL $x'(t) = g(x(t))$ heißt *autonom*.

Stationäre Stelle

Sei $x_0 \in D$ mit $g(x_0) = 0$ von $x'(t) = g(x(t))$ für $g : D \to \mathbb{R}^p$. Dann ist x_0 eine stationäre Stelle.

Sei $g \in C(D, \mathbb{R}^p)$, ex. Lsg. $x : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^p$ und $x_0 := \lim_{t\to\infty} x(t)$. Dann ist x_0 stationäre Stelle und es gilt $x'(t) \to 0$ $(t \to \infty)$

Monotone Lösung für $p = 1$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $g \in C(D, \mathbb{R})$ und $x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ eine Lsg. von $x'(t) = g(x(t))$. Dann ist x monoton.

Fundamentalsystem

Sei $x' = Ax$ eine homogene lineare DGL. Ein *Fundamentalsystem* ist eine Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ des Lösungsraums:

$$\mathcal{L} := \left\{ x \in C^1([a, b], \mathbb{R}^p) \,\middle|\, x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k,\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Bahn, Orbit, Trajektorie

Seien $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$ lokal Lipschitz.
Ist $x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^p$ Lsg. von $x'(t) = f(x(t))$ so heißt $x(\mathcal{J})$ *Bahn*, *Orbit*, *Trajektorie* von $x'(t) = f(x(t))$.

Erstes Integral

Sei $H \in C^1(D, \mathbb{R})$.
H heißt *erstes Integral* von $x'(t) = f(x(t))$ gdw.:

$$\forall x \in D : H'(x) \cdot f(x) = 0$$

Sei weiter $x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^p$ Lsg. von $x'(t) = f(x(t))$. Dann ex. $c \in \mathbb{R}$ s.d.: $\forall t \in \mathcal{J} : H(x(t)) = c$

Stabilität

Sei $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = 0$ stat. Stelle von $x' = f(x)$.

x_0 heißt *stabil* gdw. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x_1 - x_0\| < \delta$ und ist $x : [t_0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ die nach rechts nicht fort. Lsg. des AWP $x'(t) = f(x(t)), x(t_0) = x_1$ so ist $\omega_+ = \infty$ und $\forall t \geq t_0 : \|x(t) - x_0\| < \epsilon$.

Gilt $x(t) \to x_0$ $(t \to \infty)$ so ist x_0 asymp. stabil.

Stabilitätssatz

Sei $f(x_0) = 0$ und f in x_0 diffbar. Gilt für EW $\forall \lambda \in \sigma(f'(x_0)) : \text{Re}\lambda < 0$ so ist x_0 asymptotisch stabil.

Gilt $\exists \lambda \in \sigma(f'(x_0)) : \text{Re}\lambda > 0$ so ist x_0 instabil.

Lyapunov-Funktion

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^p$ lokal Lipschitz sowie $x_0 = 0 \in D$ und $f(x_0) = 0$.
Für das AWP $x'(t) = f(x(t))$, $x(t_0) = 0$ ist def.:

Sei $r > 0, U_r(0) \subseteq D$ und $V \in C^1(U_r(0), \mathbb{R})$. V heißt *Lyapunov-Funktion* zu $x' = f(x)$ in Punkt $x_0 = 0$ gdw.: $V(0) = 0, \forall x \in U_r(0) \setminus \{0\} : V(x) > 0$ und $\forall x \in U_r(0) : V'(x) \cdot f(x) \leq 0$.

Besitzt $x' = f(x)$ eine LF so ist $x_0 = 0$ stabil.

Gilt weiter $\forall x \in U_r(0) \setminus \{0\} : V'(x) \cdot f(x) < 0$ so ist x_0 asymptotisch stabil.

Randwertprobleme

$a, b \in \mathbb{R}, a < b, \mathcal{J} := [a, b], q \in C(\mathcal{J}), p \in C^1(\mathcal{J}), p > 0$
$L : C^2(\mathcal{J}) \to C(\mathcal{J})$, $Lu := (pu')' + qu$ ist *selbstadj. Differentialoperator 2. Ordnung*.

$r \in C(\mathcal{J})$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $(\alpha_0, \alpha_1) \neq (0, 0) \neq (\beta_0, \beta_1)$
$R_a, R_b : C^2(\mathcal{J}) \to \mathbb{R}$ sind *Randoperatoren*:

$$R_a u := \alpha_0 u(a) + \alpha_1 p(a) u'(a)$$
$$R_b u := \beta_0 u(b) + \beta_1 p(b) u'(b)$$

Sturmsches Randwertproblem

Sei $\gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}$.

$$(Lu)(t) = r(t) \text{ mit } R_a u = \gamma_a,\ R_b u = \gamma_b$$

Gilt $R_a u = u(a)$, $R_b u = u(b)$ so handelt es sich um Randoperatoren 1. Art in einem Dirichlet RWP.

Gilt $R_a u = u'(a)$, $R_b u = u'(b)$ so handelt es sich um Randoperatoren 2. Art in einem Neumann RWP.

Für $t_0 \in \mathcal{J}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hat AWP $(Lu)(t) = r(t)$ mit $u(t_0) = \alpha$ und $u'(t_0) = \beta$ genau eine Lsg. auf $\mathcal{J}$.

Lösen lin. unabhg. $u_1, u_2 : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ die homogene Gl. $(Lu)(t) = 0$, so bilden u_1, u_2 ein FS von $Lu = 0$. Ist zusätzlich $u_s : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ spezielle Lsg. von $Lu = r$ so ist die die allg. Lsg. von $Lu = r$ geg. durch:

$$u_s + c_1 u_1 + c_2 u_2 \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Charakterisierung des FS von $Lu = 0$

Seien $u, v : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ Lsg. von $Lu = 0$. Dann:

$$\exists c \in \mathbb{R} \forall t \in \mathcal{J} : p(t)(u(t)v'(t) - v(t)u'(t)) = c$$

$\{u, v\}$ ist ein FS von $Lu = 0$ gdw. Konstante $c \neq 0$.

Spezielle Lösung von $Lu = r$

Sei $u, v : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ FS von $Lu = 0$, $c = c(u, v) \in \mathbb{R}$ die Konstante aus Char. und für $\tau \in \mathcal{J}$:

$$u_\tau(t) := \frac{1}{c}(u(\tau)v(t) - u(t)v(\tau))$$

Für $t \in \mathcal{J}$): $u_s(t) := \int_a^t u_\tau(t) r(\tau) d\tau$
Dann gilt $u_s(a) = u_s'(a) = 0$ also $R_a u_s = 0$ und u_s ist spezielle Lösung von $Lu = r$.

Allgemeine Lösung von $Lu = r$

$$u_s(t) + c_1 u(t) + c_2 v(t) = u(t)\left(c_1 - \frac{1}{c}\int_a^t v(\tau) r(\tau) d\tau\right) + v(t)\left(c_2 + \frac{1}{c}\int_a^t u(\tau) r(\tau) d\tau\right)$$

Zulässige Fundamentalsysteme

Ein FS $\{u, v\}$ von $Lu = 0$ heißt *zulässig* gdw.:

$$R_a u = 0,\ R_b u \neq 0,\ R_a v \neq 0,\ R_b v = 0$$

Greensche Funktion

Sei $(Lu)(t) = r(t)$ mit $R_a u = R_b u = 0$ trivial lösbares *halbhomogenes RWP* und $u, v : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ zulässiges Fundamentalsystem von $Lu = 0$.
Dann ist $w : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ DIE Lsg. des RWP:

$$w(t) = \int_a^b G(t, \tau) r(\tau) d\tau$$

Hierbei ist $G(t, \tau)$ die *Greensche Funktion*:

$$G(t, \tau) := \begin{cases} \frac{1}{c}(v(t)u(\tau)) & a \leq \tau \leq t \leq b \\ \frac{1}{c}(v(\tau)u(t)) & a \leq t < \tau \leq b \end{cases}$$

Die Greensche Funktion $G(t, \tau)$ ist stg. auf $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$, es gilt $\forall t, \tau \in \mathcal{J} : G(t, \tau) = G(\tau, t)$ und sie ist unabhängig der Wahl des zulässigen FS.
Die Lösung des Sturmschen RWP ergibt sich als:

$$\overline{w}(t) = w(t) + \frac{\gamma_b}{R_b u} u(t) + \frac{\gamma_a}{R_a v} v(t)$$