Nützliches aus der Mengenlehre

De Morgansche Regeln

Sei $\mathcal{B}$ ein Mengensystem.

$$\left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B\right)^c = \bigcap_{B\in\mathcal{B}} B^c \qquad \left(\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\right)^c = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B^c$$

Mengen-Ring

Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ ist ein Ring gdw. $\forall A,B \in \mathcal{A}$:

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(b) $B \setminus A \in \mathcal{A}$

(c) $A \cup B \in \mathcal{A}$

σ-Algebren

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra auf der nichtleeren Menge X gdw.:

(a) $X \in \mathcal{A}$

(b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$

(c) $\forall j \in \mathbb{N} : A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

Eigenschaften von σ-Algebren

Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, $n \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{N} : A_j \in \mathcal{A}$, dann ist $\mathcal{A}$ nach den folgenden Eigenschaften abgeschlossen unter abzählbaren Operationen:

(a) $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$

(b) $A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n \in \mathcal{A}$

(c) $A_1 \bigcap \cdots \bigcap A_n \in \mathcal{A}$

(d) $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$

(e) $A_1 \setminus A_2 := A_1 \bigcap A_2^c \in \mathcal{A}$

Erzeugte σ-Algebren

Die durch das nichtleere Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ auf X erzeugte σ-Algebra ist wie folgt definiert:

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) | \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$$

Der Erzeuger $\mathcal{E}$ ist hierbei allg. nicht eindeutig.

Eigenschaften erzeugter σ-Algebren

Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, dann gilt:

(a) $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra $\wedge\ \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$

(b) $\sigma(\mathcal{E})$ ist kleinste $\mathcal{E}$ enthaltende σ-Algebra.

(c) $\mathcal{E}$ ist σ-Algebra $\Rightarrow \mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E})$

(d) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$

Borelsche σ-Algebra

Sei X ein metrischer Raum und $\mathcal{O}(X)$ das System der in X offenen Mengen, dann ist $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}(X))$ die Borelsche σ-Algebra auf X.
Im Speziellen wird $\mathcal{B}_m := \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ gesetzt.
$\mathcal{B}_m$ enthält insb. alle offenen und abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^m$ sowie deren abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitte.

Charakterisierung

$$\mathcal{B}_m = \sigma(\{(a,b] | a,b \in \mathbb{Q}^m, a \leq b\})$$

Analoges gilt auch für andere Intervalle.

Maße auf σ-Algebren

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X.
$\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ist positives Maß auf $\mathcal{A}$ gdw.:

(a) μ wohldefiniert und nichtnegativ

(b) $\mu(\emptyset) = 0$

(c) $\forall$ disjunkte $\{A_j | j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$:
$\mu(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$

Maßraum

Ein Tripel $(X,\mathcal{A},\mu)$ ist Maßraum. Ein endlicher Maßraum erfüllt zusätzlich $\mu(X) < \infty$.
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß erfüllt $\mu(X) = 1$.

Punkt- / Diracmaß

Für fest gewählte $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $x \in X$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß für $A \subseteq X$ definiert:

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Zählmaß

Sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\forall j \in \mathbb{N} : p_j \in [0,\infty]$ fest gewählt.
$\mu(A) := \sum_{j\in A} p_j$ für $A \subseteq \mathbb{N}$ ist Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
Gilt zusätzlich $\forall j \in \mathbb{N} : p_j = 1$ so heißt μ Zählmaß.

Eigenschaften von Maßen

Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ Maßraum und $A,B,A_j \in \mathcal{A}$ für $j \in \mathbb{N}$.

Monotonie $\quad A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

σ-Subadditivität $\quad \mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$

Stetigkeit (unten) $\quad A_j \uparrow \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j)$

Stetigkeit (oben) $\quad A_j \downarrow \wedge\ \mu(A_1) < \infty$
$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j)$

Für $\mu(A) < \infty$ folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
Für endliche Maße gilt insb. $\mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A)$.

Prämaß

Ein $f : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ ist ein Prämaß auf Ring $\mathcal{A}$ gdw.:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $\{A_j | j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ disjunkt und $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$

Lebesguemaß

System der Intervalle

Sei $I = (a,b] \subseteq \mathbb{R}^m$ für $a,b \in \mathbb{R}^m$ mit $a \leq b$, dann wird das System von Intervallen $\mathcal{J}_m$ definiert:
$\lambda(I) = \lambda_m(I) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m)$

Ring der Figuren

$$\mathcal{F}_m = \left\{ A = \bigcup_{j=1}^n I_j | I_j \in \mathcal{J}_m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Eigenschaften des Ring der Figuren

Seien $I_1, I_2 \in \mathcal{J}_m$:

(a) $\sigma(\mathcal{F}_m) = \mathcal{B}_m$

(b) $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{J}_m$

(c) $I_1 \setminus I_2 \in \mathcal{F}_m$ sowie endliche Vereinigung disjunkter Intervalle aus $\mathcal{J}_m$

(d) $\forall A \in \mathcal{F}_m : A$ ist endliche Vereinigung disjunkter Intervalle aus $\mathcal{J}_m$

(e) $\mathcal{F}_m$ ist Ring

Messbare Funktionen

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf $Y \neq \emptyset$ sowie $f : X \to Y$ Funktion.
f heißt ($\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-)messbar gdw. $\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

Borel-Messbarkeit

Seien X,Y metrische Räume.
Die Funktion $f : X \to Y$ heißt Borel-messbar, wenn sie $\mathcal{B}(X)$-$\mathcal{B}(Y)$-messbar ist.

Eigenschaften Borel-messbarer Fkt.

Seien $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ σ-Algebren auf $X,Y,Z \neq \emptyset$.

(a) $f : X \to Y$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mb., $g : Y \to Z$ ist $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$-mb. $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-mb.

(b) $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$, $f : X \to Y$ dann ist f messbar gdw. $\forall E \in \mathcal{E} : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$

(c) X,Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig $\Rightarrow f$ ist Borel-messbar

(d) $f : X \to \mathbb{R}^m$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_m$-mb. gdw. $f_i : X \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_1$-mb.

(e) f,g sind $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_1$-mb. und $\alpha,\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow fg : X \to \mathbb{R}$ und $\frac{1}{f} : \{x \in X | f(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ mb.

(f) $f : X \to \mathbb{R}^m$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_m$-mb.
$\Rightarrow g : X \to \mathbb{R}; x \mapsto |f(x)|_2$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_1$-mb.

(g) $X = W \dot\cup Z$ mit $\emptyset \neq W,Z \in \mathcal{A}$, $f : W \to Y$ ist $\mathcal{A}_W$-$\mathcal{B}$-mb., $g : Z \to Y$ ist $\mathcal{A}_Z$-$\mathcal{B}$-mb.
$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in W \\ g(x) & x \in Z \end{cases}$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mb.

(h) Stückw. stg. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind Borel-mb.

(i) Für diffbare $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}([a,b])$-$\mathcal{B}_1$-mb.

Borel-Messbarkeit in $\overline{\mathbb{R}}$

Für $f,g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien für $=,\neq,\leq,<$ usw.:

$$\{f = g\} = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$$
$$\{f \leq g\} = \{x \in X | f(x) \leq g(x)\}$$

Sei die Borelsche σ-Algebra $\overline{\mathcal{B}}_1$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ definiert als:
$\overline{\mathcal{B}}_1 := \{B \cup E | B \in \mathcal{B}_1, E \subseteq \{+\infty,-\infty\}\}$
Weiterhin gilt: $\overline{\mathcal{B}}_1 = \sigma(\{[-\infty,a] | a \in \mathbb{Q}\})$
Äquivalent sind für $\leq,<,\geq,>$:

(a) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar

(b) $\forall a \in \mathbb{Q} : \{f \leq a\} \in \mathcal{B}(X)$

Konvergenzeigenschaften Borel-mb. Fkt.

Seien $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}_1$-messbar

$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}_1$-messbar

$\forall x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n$ ist $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}_1 -$ mb.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar. $\Rightarrow f'$ ist $\mathcal{B}([a,b])$-$\mathcal{B}_1$-mb.

Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $X_j \in \mathcal{A}$ mit $X_j \uparrow$, $\cup_{j\in\mathbb{N}} X_j = X$ s.d. $\forall j \in \mathbb{N} : f\big|_{X_j} : X_j \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $\mathcal{A}_{X_j}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-mb.
$\Rightarrow f$ ist $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-mb.

Positiv- und Negativteil einer Funktion

Für $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$: $f_+ = \max\{f,0\} : X \to [0,\infty]$
$f_- = \max\{-f,0\} : X \to [0,\infty]$
Es gelten $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$
f ist $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-mb. gdw. f_+ und f_- $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_+$-mb. sind.
Dann ist auch $|f| : x \mapsto |f(x)|$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_+$-mb.

Einfache Funktionen

Messbare $f : X \to \mathbb{R}$ heißt einfach, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt. Die Normalform von f ist für $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$ mit $y \in f(X)$ definiert:

$$f = \sum_{y \in f(X)} y \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(\{y\})}$$

Sei $f : X \to \overline{R}$ messbar, dann gelten:

(a) $\exists$ einfache $f_n : X \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ punktweise und $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \le |f|$

(b) Für beschränkte f gilt (a) mit glm. Konv.

(c) Für $f \ge 0$ gilt (a) mit $f_n \le f_{n+1} \le f$

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-mb. gdw. einfache Fkt. $f_n : X \to \mathbb{R}$ ex., welche punktweise gegen f konv.

Lebesgue-Integral

Integral für nichtnegative einfache Fkt.

$$\int f d\mu = \int_X f(x)d\mu(x) := \sum_{y \in f(X)} y \cdot \mu(f^{-1}(\{y\}))$$

Integral für nichtnegative Funktionen

Sei $f : X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_+$-mb. und steigende Folge einfacher $f_n \le f$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ gegeben:

$$\int_X f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu$$

Grundlegende Integraleigenschaften sind erfüllt.

$$\int_X f \, d\mu = \sup\left\{ \int_X g \, d\mu | g \text{ einfach}, 0 \le g \le f \right\}$$

Monotone Konvergenz

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f_n : X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_+$-mb. und $f_n \le f_{n+1}$. Dann ist $f : X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_+$-mb. und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_X f(x)d\mu(x) &= \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x)\end{aligned}$$

Dies gilt nicht ohne Monotonie oder für eine fallende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Summen messbarer Funktionen

Seien $f_j : X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_+$-mb. für $\forall j \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\sum_{j=1}^\infty f_j$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_+$-messbar und:

$$\int_X \sum_{j=1}^\infty f_j(x)d\mu(x) = \sum_{j=1}^\infty \int_X f_j(x)d\mu(x)$$

Integral für $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Funktionen

Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-mb. Funktion. Dann sind auch f_+ und f_- mb. f ist Lebesgue-integrierbar, wenn:

$$\int_X f_+(x)d\mu(x) < \infty \text{ und } \int_X f_-(x)d\mu(x) < \infty$$

Das Lebesgue-Integral ist dann definiert durch:

$$\int f d\mu = \int_X f_+(x)d\mu(x) - \int_X f_-(x)d\mu(x)$$

$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(X) := \{f : X \to \mathbb{R} | f \text{ ib.}\}$

Charakterisierung der Integrierbarkeit

Für $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-mb. Fkt. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind äquivalent:

(a) f ist integrierbar

(b) Es ex. integrierbare Fkt. $u, b : X \to [0,\infty]$ mit $f = u - v$ wobei $\nexists x \in X : u(x) = v(x) = \infty$

(c) Es ex. ib. Fkt. $g : X \to [0,\infty]$ mit $|f| \le g$

(d) $|f| : X \to [0,\infty]$ ist ib d.h. $\int_X |f| d\mu < \infty$

Eigenschaften des Integrals

(a) $\int_Y f\big|_Y(x)d\mu_Y(x) = \int_X \mathbb{1}_Y(x) f(x)d\mu(x)$

(b) $\int_X \alpha f(x)d\mu(x) = \alpha \int_X f(x)d\mu(x)$

(c) $\int_{X_0} (f + g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

(d) $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind ib.

(e) Sei $f \le g$. Dann ist $\int_X f d\mu \le \int_X g d\mu$

(f) $|\int_X f d\mu| \le \int_X |f| d\mu$

(g) Sei $h : X \to \mathbb{R}$ mb. und beschränkt mit $\mu(\{h \ne 0\}) < \infty$. Dann ist h integrierbar und: $|\int_X h d\mu| \le \|h\|_\infty \mu(\{h \ne 0\})$

(h) Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ und $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-mb. Dann ist $\mathbb{1}_A h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ib. und $\int_A h d\mu = 0$

$\mathcal{L}^1(\mu)$ ist Vektorraum und das Integral ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{L}^1(\mu)$ nach $\mathbb{R}$.

Sei f einfach mit $f := \sum_{j=1}^n y_j \mathbb{1}_{B_j}$ mit $y_j \in \mathbb{R}$, $B_j \in \mathcal{A}$ und $\mu(B_j) < \infty$. Dann: $\int_X f d\mu = \sum_{j=1}^n y_j \mu(B_j)$

Übereinstimmung Riemann-Integral

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stckw. stetig. Dann ist f Lebesgue- und Riemann-integrierbar, die beiden Integrale stimmen überein.
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt auch für das Lebesgue-Integral.

Nullmengen

Mengen $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißen Nullmengen. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind eine λ_1-Nullmenge, Hyperebenen in $\mathbb{R}^m$ sind λ_m-Nullmengen.

Eigenschaften von Nullmengen

(a) $M, N \in \mathcal{A}$, $M \subseteq N$ ist μ-Nullmenge $\Rightarrow M$ ist μ-Nullmenge

(b) $\forall j \in \mathbb{N} : N_j$ ist Nullmenge $\Rightarrow N = \cup_{j\in\mathbb{N}} N_j$ ist Nullmenge

(c) Überabzählbare Vereinigungen von Nullmengen können das Maß ∞ besitzen

(d) Borelmenge A ist λ_m-Nullmenge gdw. für $\forall \epsilon > 0$ offene Intervalle I_j existieren s.d. $A \subseteq \cup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ und $\sum_{j=1}^\infty \lambda_m(I_j) \le \epsilon$

(e) λ_m-Nullmenge hat keinen inneren Punkt

Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt vollständig, wenn $\forall M \subseteq$ Nullmenge $N : M \in \mathcal{A}$.

$\tilde{\mathcal{A}} := \{\tilde{A} = A \cup M | A \in \mathcal{A}, M \subseteq N$ für eine μ-Nullmenge $N\}$ ergibt Vervollständigung $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ eines beliebigen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Definition fast überall

Eine Eigenschaft E besteht für fast alle $x \in X$ oder fast überall. wenn es Nullmengen N gibt s.d. E für alle $x \in X \setminus N$ gilt.

Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ib. Dann ist $\{|f| = \infty\}$ eine Nullmenge, f ist also fast überall endlich.

Lemma von Fatou

Sei $f_n : X \to [0,\infty]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mb. Dann:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Konvergiert f_n f.ü. gegen mb. $f : X \to [0,\infty]$:

$$\int_X f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Majorisierte Konvergenz (Lebesgue)

Sei $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $g : X \to [0,\infty]$ integrierbar. Konvergiere (f_n) in $\overline{\mathbb{R}}$ f.ü. gegen f und $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \le g$ f.ü.
Dann sind f und f_n für $\forall n \in \mathbb{N}$ integrierbar und:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \le \int_{X\setminus N} |f_n - f| d\mu \to 0$$

Mit $N := \{|f| = \infty\} \cup \cup_{n\in\mathbb{N}} \{|f_n| = \infty\}$ Nullmenge.

Stetigkeitssatz

Sei M metrischer Raum, $t_0 \in M$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $f : M \times X \to \mathbb{R}$ erfülle:

(a) $\forall t \in M$ ist $x \mapsto f(t,x)$ messbar

(b) Es ex. ib. $g : X \to [0,\infty]$ und Nullmengen N_t für $t \in M$, dass $|f(t,x)| \le g(x)$ für alle $t \in M$ und $x \in X \setminus N_t$ gilt

(c) Es ex. Nullmenge N s.d. $t \mapsto f(t,x)$ für $x \in X \setminus N$ bei t_0 stetig ist

Dann ist $\forall t \in M$ die Fkt. $X \to \mathbb{R}; x \mapsto f(t,x)$ ib. und es gilt:

$$\lim_{t\to t_0} \int_X f(t,x)d\mu(x) = \int_X f(t_0,x)d\mu(x)$$

Differentiationssatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $j \in \{1, \cdots, k\}$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $f : U \times X \to \mathbb{R}$ erfülle:

(a) $\forall t \in U : x \mapsto f(t,x)$ ist integrierbar

(b) $\exists$ Nullmenge $N_1 \forall t \in U \land x \in X \setminus N_1$: $\frac{\partial}{\partial t_j} f(t,x)$ existiert

(c) $\exists$ Nullmenge N_2 und ib. $g : X \to [0,\infty]$: $\forall x \in X \setminus N_2, t \in U : |\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)| \le g(x)$

Dann ist $\forall t \in U$ die Abbildung $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t_j} f(t,x)$ integierbar und es existiert die partielle Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \int_X f(t,x)dx = \int_X \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)dx$$

Iterierte Integrale

Darstellung von Integralen auf $\mathbb{R}^m$ als Komposition von Integralen auf $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^l$ mit $m = k + l$.
Für $C \subseteq \mathbb{R}^m$ sind die Schnitte definiert:

$$C_y = \{x \in \mathbb{R}^k | (x,y) \in C\} \qquad \text{für feste } y \in \mathbb{R}^l$$
$$C^x = \{y \in \mathbb{R}^l | (x,y) \in C\} \qquad \text{für feste } x \in \mathbb{R}^k$$

Prinzip des Cavalieri

Für beliebige $C \in \mathcal{B}_m$ gilt:

$$\lambda_m(C) = \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_l(C^x)dx = \int_{\mathbb{R}^l} \lambda_k(C_y)dy$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_C(z)dz &= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_C(x,y)dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_C(x,y)dx \right) dy\end{aligned}$$

Satz von Tonelli

Sei $f:\mathbb{R}^m \to [0,\infty]$ messbar. Dann:

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^l}\left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)dx\right)dy$$

Satz von Fubini

Sei $f:\mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann ex. Nullmengen $M\in\mathcal{B}_k$ und $N\in\mathcal{B}_l$ s.d. $f^x:\mathbb{R}^l\to\overline{\mathbb{R}}$ für alle $x\in\mathbb{R}^k\setminus M$ und $f_y:\mathbb{R}^k\to\overline{\mathbb{R}}$ für alle $y\in\mathbb{R}^l\setminus N$ integrierbar sind.
Dann sind $x\mapsto\int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)dy$ und $y\mapsto\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)dx$ integrierbar und es gilt der Satz von Tonelli.

Transformationssatz

Sei $U\subseteq\mathbb{R}^m$ offen, $\phi\in C^1(U,\mathbb{R}^m)$ injektiv und $A\in\mathcal{B}_m$ mit $A\subseteq U$ s.d. $A^\circ\neq\emptyset$ und $A\setminus A^\circ$ Nullmenge ist. Sei $\phi(A)\in\mathcal{B}_m$ und $\forall x\in A^\circ:\det\phi'(x)\neq 0$.
Dann ist $\phi(A^\circ)$ offen, $\phi:A^\circ\to\phi(A^\circ)$ Diffeomorphismus und $\phi(A)\setminus\phi(A^\circ)$ Nullmenge. Weiter:

(a) Sei $f:\phi(A)\to[0,\infty]$ messbar. Dann:
$$\int_{\phi(A)} f(y)dy = \int_A f(\phi(x))|\det\phi'(x)|dx$$

(b) Sei $f:\phi(A)\to\overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist f auf $\phi(A)$ ib. gdw. $x\mapsto f(\phi(x))|\det(\phi'(x))|$ auf A integrierbar ist. Es gilt dann auch (a).

Differentialgeometrie

C^1-Hyperflächen

Eine Menge $M\subseteq\mathbb{R}^m$ ist eingebettete C^1-Hyperfläche, wenn $\forall x\in M$ offene Mengen $U,V\subseteq\mathbb{R}^m$ und Diffeomorphismus $\psi:V\to U$ existieren s.d. $x\in V$ und $\psi(V\cap M)=U\cap(\mathbb{R}^{m-1}\times\{0\})$ gilt.

Abbildung ψ heißt Karte mit Kartengebiet V.

C^k-Hyperflächen

Liegt die Karte ψ einer C^1-Hyperfläche M in $C^k(V,\mathbb{R}^m)$, dann ist M eine C^k-Hyperfläche.

Dünnsinguläre C^k-Hyperflächen

Eine Borelmenge $M\subseteq\mathbb{R}^m$ ist *dünnsinguläre* C^k-Hyperfläche gdw. C^k-Hyperfläche $M_r\subseteq M$ mit $\overline{M}_r=M$ und $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ existiert s.d. $N=M\setminus M_r$ eine $(m-1)$-dimensionale Nullmenge ist.

Gramsche Determinante

Sei $F:U\to W$ eine Parametrisierung. Dann ist
$$g_F(t)=\det(F'(t)^\top F'(t))$$
die *Gramsche Determinante* von F. Die Matrix $F'(t)^\top F'(t)\in L(\mathbb{R}^{m-1})$ ist sym. und positiv definit.

Für $m=3$ gilt insbesondere:
$$g_F(t)=|\partial_1F(t)\times\partial_2F(t)|_2^2 = \left|\begin{pmatrix}\partial_1F_2(t)\partial_2F_3(t)-\partial_1F_3(t)\partial_2F_2(t)\\ \partial_1F_3(t)\partial_2F_1(t)-\partial_1F_1(t)\partial_2F_3(t)\\ \partial_1F_1(t)\partial_2F_2(t)-\partial_1F_2(t)\partial_2F_1(t)\end{pmatrix}\right|_2^2$$

Im Graphenfall $F(t)=(t,h(t))$ für $t\in U$, $U\subseteq\mathbb{R}^{m-1}$ offen und $h\in C^1(U,\mathbb{R})$ gilt: $\sqrt{g_F(t)}=\sqrt{1+|\nabla h(t)|_2^2}$

Für die m-dim. Param. mit Polarkoordinaten gilt: $\sqrt{g_F(r,\varphi,\theta)}=r^{m-1}\cos^1(\theta_1)\cdots\cos^{m-2}(\theta_{m-2})$

Oberflächenintegral

Sei $F:U\to W$ eine Parametrisierung, $M_0=F(U)\subseteq\mathbb{R}^m$ ein offenes Flächenstück. Sei weiter $f:M_0\to\overline{\mathbb{R}}$ messbar und nichtnegativ oder die Funktion $g:=f\circ F\sqrt{g_F}$ integrierbar. Dann:
$$\int_{M_0} f\,d\sigma=\int_{M_0} f(x)d\sigma(x):=\int_U f(F(t))\sqrt{g_F(t)}dt$$

Oberflächenmaß

Sei $B\in\mathcal{B}(M_0)$ dann ist $\mathbb{1}_B$ messbar und $F^{-1}(B)\in\mathcal{B}(U)$. Dann ist das Oberflächenmaß definiert:
$$\sigma(B):=\int_{M_0}\mathbb{1}_B d\sigma=\int_U \mathbb{1}_B(F(t))\sqrt{g_F(t)}dt = \int_{F^{-1}(B)}\sqrt{g_F(t)}dt$$

Maß ist unabhg. der Wahl der Parametrisierung.

Divergenzsatz von Gauß

Sei $D\subseteq\mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit dünnsingulärem C^1-Rand, liege $f\in C(\overline{D},\mathbb{R}^m)\cap C_b^1(D,\mathbb{R}^m)$ und $(f|\nu)\in\mathcal{L}^1(\partial D,\sigma)$. Dann:
$$\int_D div\,f(x)dx=\int_{\partial D}(f(x)|\nu(x))d\sigma(x)$$
Mit $\mathrm{div} f(x):=\mathrm{spur}\ f'(x)=\partial_1f_1(x)+\cdots+\partial_mf_m(x)$ und ν ist äußere Einheitsnormale an ∂D:
$$\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla h(x')|_2^2}}\begin{pmatrix}-\nabla h(x')\\ 1\end{pmatrix},\quad x=(x',x_m)$$

Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

Für $f\in C^1(D,\mathbb{R}^3)$ ist die Rotation definiert:
$$\mathrm{rot}\ f(x)=\begin{pmatrix}\partial_1\\ \partial_2\\ \partial_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_2f_3(x)-\partial_3f_2(x)\\ \partial_3f_1(x)-\partial_1f_3(x)\\ \partial_1f_2(x)-\partial_2f_1(x)\end{pmatrix}$$

Sei $F:U\to D$ C^2-Parametrisierung mit offenen, beschränken $U\subseteq\mathbb{R}^2$, $D\subseteq\mathbb{R}^3$. Die äußere Einheitsnormale n an $M=F(U)\subseteq D$ sei:
$$n(F(t))=\frac{1}{|\partial_1F(t)\times\partial_2F(t)|_2}\partial_1F(t)\times\partial_2F(t)$$

Weiter sei ∂U geschlossene und doppelpunktfreie C^1-Kurve mit Parametrisierung $\gamma:(a,b)\to\partial U$ im Gegenuhrzeigersinn s.d. ∂M C^1-Kurve mit Parametrisierung $\varphi=F\circ\gamma$ ist. Dann gilt:
$$\int_M(\mathrm{rot}\ f(x)|n(x))d\mu(x)=\int_{\partial M} f\cdot\,dx$$
Dabei ist das *Kurvenintegral zweiter Art* geg. als:
$$\int_{\partial M} f\cdot dx=\int_a^b(f(\varphi(\tau))|\varphi'(\tau))d\tau$$

Lebesguesche Räume

Für messbare $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$:
$$\|f\|_p=\left(\int_X|f|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\ \text{ für } p\in[1,\infty)$$
$$\|f\|_\infty=\mathrm{esssup}_{x\in X}|f(x)| = \inf\{c>0|\exists \text{ NM } N_c:\forall x\in X\setminus N_c:|f(x)|\le c\}$$

esssup bezeichnet das *wesentliche Supremum*.

Die Konvergenz $\|f_n-f\|_p\to 0$ heißt für $p\in[1,\infty)$ die *Konvergenz im p-ten Mittel*. $\|f_n-f\|_1$ ist gerade die Fläche zwischen den Graphen von f und f_n

$\mathcal{L}^p$-Räume

$$\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu):=\{f:X\to\mathbb{R}|f\text{ mb.},\|f\|_p<\infty\}$$
$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X,\mathcal{A},\mu):=\{f:X\to\mathbb{C}|f\text{ mb.},|f|\in\mathcal{L}^p(\mu)\}$$

$\mathcal{L}^p(\mu)$ ist für $p\in[1,\infty]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zusätzlich ist $f\to\|f\|_p$ homogen und erfüllt die Δ-UGL, ist jedoch bei Existenz einer μ-Nullmenge $N\neq\emptyset$ nicht definit wg. $\|\mathbb{1}_N\|_p=0$ und $\mathbb{1}_N\neq 0$.
$$\mathcal{N}=\{f:X\to\mathbb{R}|f\text{ ist mb.},f=0\text{ f.ü.}\}$$
$$L^p(X,\mathcal{A},\mu)=\mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{N}$$

Der Quotientenraum $L^p(\mu)$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Restklassen $\hat{f}=f+\mathcal{N}$ für $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$. Es gilt $\hat{f}=\hat{g}$ gdw. alle $f\in\hat{f}$ und $g\in\hat{g}$ fast überall gleich sind.

$(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$ ist $\forall p\in[1,\infty]$ normierter Vektorraum.

Hölder Ungleichung

Sei $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ mit:
$$p'=\begin{cases}\frac{p}{p-1} & p\in(1,\infty)\\ \infty & p=1\\ 1 & p=\infty\end{cases}$$

Dann liegt für $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$, $g\in\mathcal{L}^{p'}(\mu)$ das Produkt $fg\in\mathcal{L}^1(\mu)$ und die Höldersche Ungleichung gilt:
$$\left|\int_X fg\,d\mu\right|\le\int_X|fg|d\mu=\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_{p'}$$

Minkowski Ungleichung

Seien $f,g\in\mathcal{L}^p(\mu)$. Dann gilt $f+g\in\mathcal{L}^p(\mu)$ und:
$$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$$

Konvergenz in $\mathcal{L}^p$

Sei $\mu(X)<\infty$ und $1\le p\le q\le\infty$. Dann gilt $\mathcal{L}^q(\mu)\subseteq\mathcal{L}^p(mu)$ und für $f\in L^q(\mu)$:
$$\|f\|_p\le\mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q$$
Die Konvergenz $\|f-f_n\|_p\to 0$ folgt also in diesem Fall aus $\|f-f_n\|_q\to 0$ für $n\to\infty$.

Sei $1\le p<\infty$, $f_n,f:X\to\mathbb{R}$ mb., $g\in\mathcal{L}^p(\mu)$, $\forall n\in\mathbb{N}:|f_n|\le g$ f.ü. und (f_n) konvergiere gegen f. Dann gilt: $f_n,f\in\mathcal{L}^p(\mu)$ und $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p=0$.

Satz von Riesz-Fischer

Sei $1\le p<\infty$, (f_n) Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ bzgl. $\|\cdot\|_p$. Dann existieren $f,h\in\mathcal{L}^p(\mu)$ und Teilfolge $(f_{n_j})_j$ s.d. diese f.ü. gegen f strebt, $\forall j\in\mathbb{N}:|f_{n_j}|\le h$ f.ü. gilt und $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$ gilt.
$L^p(\mu)$ ist ein Banach-, für $p=2$ ein Hilbertraum.

Einfache Funktionen in $\mathcal{L}^p$

Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ Maßraum und $f\in L^p(\mu)$. Dann liegt $E=\{f\in L^p(\mu)|f\text{ ist einfach}\}$ dicht in $L^p(\mu)$, d.h:
$$\forall f\in L^p(\mu),\epsilon>0\,\exists\text{ einf. }g\in L^p(\mu):\|f-g\|_p\le\epsilon$$

Komplexe Integrale

Der metrische Raum $\mathbb{C}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ wird mit $\mathcal{B}_2$ identifiziert.
$f:X\to\mathbb{C}$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$-mb. gdw. $\mathrm{Re}f,\mathrm{Im}f:X\to\mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_1$-messbar sind.
Für die Integrierbarkeit von mb. $f:X\to\mathbb{C}$ gilt: $|f|:X\to[0,\infty)$ ib. $\Leftrightarrow\mathrm{Re}f,\mathrm{Im}f:X\to\mathbb{R}$ ib.
$$\int_X f\,d\mu:=\int_X\mathrm{Re}f\,d\mu+i\int_X\mathrm{Im}f\,d\mu$$