Folgen

$\lim_{n\to\infty} = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\epsilon : |a_n - a| \leq \epsilon$

Konvergenzsatz für monotone Folgen

Sei (a_n) wachsend und nach oben beschränkt
$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1} a_n := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
Analoges für fallende, nach unten beschr. Folgen.

Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt
$\overline{\lim}_{x\to\infty} a_n$ Maximum der Häufungspunkte
$\underline{\lim}_{x\to\infty} a_n$ Minimum der Häufungspunkte

Cauchyfolgen

$\forall\epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_\epsilon : |a_n - a_m| \leq \epsilon$
Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ konvergente Folge

Uneigentliche Grenzwerte

Sei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\forall K \in \mathbb{N} \exists N_K \in \mathbb{N} \forall n \geq N_K : x_n \geq K \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

Beispiele und Hinweise

$e^x = exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ insb. $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Zur Bestimmung von Folgen Grenzwerten kann auch L'Hospital herangezogen werden.

Reihen

Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ Folge, dann ist $\sum_{k\geq 0} a_k$ Reihe.

Konvergenzkriterien

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$
$\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergiert $\Rightarrow (a_k)$ ist Nullfolge.

Leibnizkriterium

Es gelte $\forall k \in \mathbb{N}_0 : b_k \geq b_{k+1} \geq 0$ und $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$

Dann konvergiert: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$

Majorantenkriterium

(a) Wenn $0 \leq |a_k| \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}_0$ und $\sum_k b_k$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_k a_k$ absolut und es gilt $|\sum_{k=0}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

(b) Wenn $a_k \geq b_k \geq 0$ und $\sum_k b_k$ divergiert, dann divergiert $\sum_k a_k$

Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ Folge, $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 : a_n \neq 0$
$\overline{\lim}_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \implies \sum a_n$ konvergiert absolut
$\underline{\lim}_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1 \implies \sum_{n\geq 0} a_n$ divergiert

Wurzelkriterium

$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert
$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n\geq 1} a_n$ divergiert
(b_n) unbeschränkt $\implies \sum_{n\geq 0} a_n$ divergiert

Integralkriterium

Für monoton fallende Koeffizientenfolge f gilt:
$\int_p^\infty f(n)dn$ integrierbar $\Leftrightarrow \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ konvergiert.

Beispiele

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (insb. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} (z \in \mathbb{C} \wedge |z| < 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ divergiert für $\alpha \leq 1$ und konvergiert für $\alpha > 1$.

Cauchykriterium

Eine Reihe $\sum_k a_k$ konvergiert genau dann, wenn:
$\forall\epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n > m \geq N_\epsilon : |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \epsilon$

Potenzreihen

Sei $z \in \mathbb{C}$, dann $\sum a_n z^n$ Potenzreihe mit Koeff. a_n.

Konvergenzradius $p := \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Konvergenzsatz für Potenzreihen

Sei p der Konvergenzradius von $\sum_n a_n z^n$, dann:

$p \in (0, \infty)$: $\sum_n a_n z^n$ konv. abs. für $|z| < p$, divergiert für $|z| > p$

$p = 0$: $\sum_n a_n z^n$ divergiert $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$p = \infty$: $\sum_n a_n z^n$ konvergiert abs. $\forall z \in \mathbb{C}$

Winkelfunktionen

$$sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Auch: $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$ und $cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$

Additionstheoreme und andere Hilfen

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos(x\pm y)}$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Stetige Funktionen

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist stetig in $z_0 \in D$, wenn für jede Folge $(z_n) \subseteq D$ mit $z_n \to z_0$ auch $f(z_n) \to f(z_0)$ für $n \to \infty$ gilt.
Wenn $z_0 \in D$ ein isolierter Punkt, dann ist f in z_0 immer stetig.

Abgeschlossenheit

$D \subseteq \mathbb{C}$ ist abgeschlossen, wenn $z_n \in D$ für $n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n\to\infty} z_n = z \implies z \in D$.

Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$. f ist glm. stetig gdw.:
$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x, x_0 \in D : |x - x_0| < \delta$
$\implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Satz vom Maximum

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f auf D ein Maximum und Minimum an, ist also insbesondere beschränkt.

Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann:
$f([a, b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$.
Insbesondere:
$\forall y \in [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f] \exists x \in [a, b] : f(x) = y$

Nullstellensatz

Sei $f \in [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a)f(b) \leq 0$, dann:
$\exists x \in [a, b] : f(x) = 0$

Intervallsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist $f(I)$ ein Intervall.

Konvergenz

Punktweise Konvergenz

Fkt. Folge (f_n) konv. punktweise gegen f, wenn:
$\forall z \in D \forall\epsilon > 0 \exists N_{\epsilon,z} \in \mathbb{N} \forall n \geq N_{\epsilon,z} : |f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$
Dies ist äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Gleichmäßige Konvergenz

Fkt. Folge (f_n) konv. gleichmäßig gegen f, wenn:
$\forall z \in D \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\epsilon : \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$
Dies ist äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} (\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|) = 0$.

Differentialrechnung

Differenzierbarkeit

Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar, wenn:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ existiert.

Regeln

Ketten $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Produkt $(\alpha f + \beta)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Quotienten $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Nützliche Ableitungen $\frac{d}{dx}$

$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	a^x	$\ln(a)a^x$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	e^{kx}	ke^{kx}
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	x^x	$x^x(1 + \ln(x))$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$f(x)^{g(x)}$	$(e^{g(x)\ln(f(x))})'$

Mittelwertsatz

Sei $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f, g \in C^1((a, b), \mathbb{R})$, dann:
$\exists\xi \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$
Für die Funktion $g(x) = x$ folgt der Mittelwertsatz:
$\exists\xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Für $f(a) = f(b)$ existiert $f'(\xi) = 0$ (Satz von Rolle).

Konvexität

Verbindungsline zweier Punke liegt über Bild.
d.h. f' wächst in I, also $\forall x \in I : f''(x) \geq 0$

Konkavität

Verbindungsline zweier Punke liegt unter Bild.
d.h. f' fällt in I, also $\forall x \in I : f''(x) \leq 0$

Youngsche Ungleichung

Seien $x, y > 0$, $p \in (1, \infty)$ und $p' := \frac{p}{p-1}$, also $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt: $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'}$

L'Hospital

Sei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ und es gelte eines:

(a) $\exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$
(b) $\exists \lim_{x\to b^-} g(x) = \pm\infty$

Ferner existiere $l \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Dann existiert $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Umkehrregel

Sei $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt monoton, stetig und differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Taylorpolynome

n-tes Taylorpolynom von f in x_0:
$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$

Taylorreihe

Taylorreihe von f in x_0:
$T_{x_0} f(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Lagrangesche Restgliedformel

$R_{n-1,x_0} f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0)^n$

Integralrestglied

Sei $f \in C^{n+1}((a,b)), n \in \mathbb{N}_0, x_0 \in (a,b)$, dann gilt:
$f(x) - T_{n,x_0} f(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$

Integralrechnung

Stückweise Stetigkeit

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stückweise stetig, wenn sich $[a,b]$ in endlich viele disjunkte Teilintervalle so aufteilen lässt, dass f eingeschränkt auf diese stetig ist. $PC([a,b])$ ist Menge stckw. stg. Fkt. über $[a,b]$.

Hauptsatz

Sei $f \in C([a,b])$, dann: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) =: F|_a^b$
Sei $g \in C^1([a,b])$, dann: $\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$

Partielle Integration

Sei $f, g \in C^1([a,b])$, dann:
$\int_a^b f'(x)g(x)dx = (fg)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Substitutionsregel

Sei $\phi \in C^1([a,b]), J = \phi([a,b]), f \in C(J)$, dann gilt:
$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)dy$

Uneigentliche Riemann-Integrale

Sei $-\infty < a < b \leq +\infty, f: [a,b) \to \mathbb{R}$ so, dass $\forall \beta \in (a,b): f\big|_{[a,\beta]} \in PC([a,\beta])$.

Falls $\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$ in $\mathbb{R}$ existiert, heißt f uneigentlich Riemann-integrierbar.

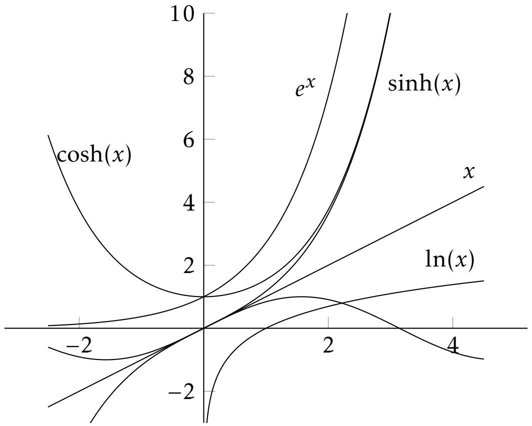
Majoranten- / Minorantenkriterium

Sei $-\infty < a < b \leq +\infty$ und $f, g: [a,b) \to \mathbb{R}$ mit $\forall c \in (a,b): f, g \in PC([a,c])$, dann:

(a) $\forall x \in [a,b): |f(x)| \leq g(x) \wedge g$ uneigentlich integrierbar $\Rightarrow f, |f|$ uneigentlich integrierbar.

(b) $\forall x \in [a,b): f(x) \geq g(x) \geq 0 \wedge g$ nicht uneigentlich integrierbar $\Rightarrow f$ nicht uneigentlich integrierbar.

Eine Auswahl von Bildern



Normierte und metrische Räume

Normen

Definitheit	$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Homogenität	$\|\alpha x\| = \|\alpha\| \|x\|$
Dreiecksungleichung	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Konvergenz

Folge $(x_n) \subseteq X$ konvergiert gegen $x \in X$, wenn:
$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\epsilon : \|x_n - x\| \leq \epsilon$

p-Norm

$$|x|_p := \begin{cases} (\sum_{k=1}^m |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq k \leq m} |x_k| & p = \infty \end{cases}$$

Hölder-Ungleichung

Sei $p \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ sowie $x, y \in \mathbb{K}^m$:
$|\sum_{k=1}^m x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^m |x_k y_k| \leq |x|_p |x|_{p'}$

Minkowski-Ungleichung

Sei $x, y \in \mathbb{K}^m$: $|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Sei $(x|y) = \sum_{k=1}^m x_k \overline{y}_k$ Skalarprodukt, dann:
$|(x|y)| \leq \sum_{k=1}^m |x_k y_k| \leq |x|_2 |y|_2$

Kugeln

offen	$B(x,r) = \{y \in X \| \|x-y\| < r\}$
abgeschlossen	$\overline{B}(x,r) = \{y \in X \| \|x-y\| \leq r\}$
Sphäre	$S(x,r) = \{y \in X \| \|x-y\| = r\}$

Äquivalenz

$\|\cdot\| \sim |||\cdot||| \Leftrightarrow \exists C, c > 0 \forall x \in X \wedge r > 0:$
$\overline{B}_{|||\cdot|||}(x, \frac{r}{C}) \subseteq B_{\|\cdot\|}(x, \frac{r}{C}) \subseteq B_{|||\cdot|||}(x, \frac{r}{c})$

Konvergenz bezüglich p-Normen

Sei $1 \leq p < q \leq \infty$, $x \in \mathbb{K}^m$, dann gilt:
$|x|_p \leq m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} |x|_q$ und $|x|_q \leq |x|_p$

Cauchyfolgen bzgl. Normen

Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. $(x_n) \subseteq X$ ist Cauchyfolge, wenn gilt:
$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_\epsilon : \|x_n - x_m\| \leq \epsilon$

Normen stetiger Funktionen

$C([a,b])$ ist Vektorraum mit $dim(C([a,b])) = \infty$.
Für $f \in C([a,b])$ gilt:

Supnorm	$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} \|f(t)\| = \max_{a \leq t \leq b} \|f(t)\|$
1-Norm	$\|f\|_1 = \int_a^b \|f(t)\| dt$

Banachraum

Wenn jede Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|)$ einen Grenzwert besitzt, dann heißt $\|\cdot\|$ vollständig und $(X, \|\cdot\|)$ ist Banachraum.

Hilbertraum

Die Norm des Banachraums $(\mathbb{K}^m, |\cdot|_2)$ ist durch Skalarprodukt gegeben. Ein solcher Banachraum heißt Hilbertraum.
Ein $\mathbb{R}$-VRaum mit SKP ist ein euklidischer Raum.

Äquivalenz der Normen

Sei V endlichdim. VRaum, dann sind alle Normen auf V äquivalent. Insb. ist V ein Banachraum.

Metriken

Definitheit	$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
Symmetrie	$d(x,y) = d(y,x)$
Dreiecksungleichung	$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Konvergenz bzgl. Metriken

$(x_n) \subseteq X$ konvergiert in (M,d) gegen $x \in X$, wenn:
$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\epsilon : d(x_n, x) \leq \epsilon$

Cauchyfolgen bzgl. Metriken

Eine Folge $(x_n) \subseteq M$ heißt Cauchfolge, wenn:
$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_\epsilon : d(x_n, x_m) \leq \epsilon$
Ein metrischer Raum ist vollständig, wenn jede Cauchfolge in (M,d) konvergiert.

Topologische Grundbegriffe

Sei M ein metrischer Raum, dann:

(a) $O \subseteq M$ ist offen in M, wenn $\forall x \in O \exists r = r(x) > 0 : B(x,r) \subseteq O$

(b) $U \subseteq M$ ist Umgebung in M von $x \in M$, wenn $\exists r > 0 : B(x,r) \subseteq U$

(c) $A \subseteq M$ ist abgeschlossen in M, wenn $M \setminus A$ in M offen ist

Charakterisierung

Sei M metrischer Raum und $A, O \subseteq M$, dann gilt:

(a) A ist abgeschlossen in M gdw. $(x_n \in A \wedge \lim_{n \to \infty} x_n = x \in M) \Rightarrow x \in A$

(b) O ist offen in M gdw. $\nexists x \in O : \exists y_n \in M \setminus O : \lim_{n \to \infty} y_n = x$

M und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen in M.
Die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Teilmengen von M sind wieder offen in M.
Der Durchschnitt beliebig vieler und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen von M sind wieder abgeschlossen in M.

Inneres, Abschluss und Rand

Sei M metrischer Raum und $\emptyset \neq N \subseteq M$, dann ist:

Innere	$N^\circ = \bigcup \{O \subseteq N \| O \text{ offen in } M\}$
Abschluss	$\overline{N} = \bigcap \{A \subseteq M \| A \text{ abg. in } M, N \subseteq A\}$
Rand	$\partial N = \overline{N} \setminus N^\circ = \overline{N} \bigcap (M \setminus N^\circ)$

N° ist die größte in M offene Teilmenge von N.
Die Menge N ist in M offen gdw. $N = N^\circ$.

$$\begin{aligned} N^\circ &= \{x \in M | \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq N\} \\ &= \{x \in M | \nexists (x_n) \in M \setminus N : \lim_{n \to \infty} x_n = x\} \end{aligned}$$

$\overline{N}$ ist die kleinste in M abg. Obermenge von N.
Die Menge N ist in M abgeschlossen gdw. $N = \overline{N}$
$\overline{N} = N^\circ \cup \partial N = \{x \in M | \exists x_n \in N : \lim_{n \to \infty} x_n = x\}$
∂N ist abgeschlossen in M.

$$\partial N = \{x \in M \; | \exists x_n \in N, y_n \in M \setminus N : \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = x\}$$

Dichtheit

N dicht in $M \Leftrightarrow \forall x \in M \exists (x_n) \in N : \lim_{n\to\infty} x_n = x$

Stetigkeit

Seien M, N metrische Räume, $f : M \to N$.

Gleichmäßige Stetigkeit

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 \forall x, y \in M : d_M(x,y) \leq \delta_\epsilon \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) \leq \epsilon$

Lipschitz Stetigkeit

f ist Lipschitz stetig mit Konstante $L > 0$, wenn:
$\forall x, y \in M : d_N(f(x), f(y)) \leq L d_M(x,y)$
Lipschitz stetige Fkt. sind insb. auch glm. stetig.
$L(V,W) = \{T : V \to W | T \text{ linear}\}$ sind lineare Abb. zwischen $\mathbb{K}$-VR V und W, genannt Operatoren.

Operatornorm

Seien V, W, Z endlichdim. norm. VRäume, $T \in L(V,W)$ und $S \in L(W,Z)$. Dann gelten:

(a) T ist Lipschitz stetig mit Konstante $\|T\| = \|T\|_{L(V,W)} := \sup_{x \in V \setminus \{O\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$

(b) $\forall x \in V : \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$

(c) $\|\cdot\|_{L(V,W)}$ heißt Operatornorm

(d) $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$

(e) $L(V,W)$ ist Banachrm. bzgl. Operatornorm

Banachscher Fixpunktsatz

Sei M metr. Raum und $f : M \to M$ strikte Kontraktion, d.h. $\exists q \in [0,1) \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) \leq q d(x,y)$. Dann $\exists! x_* \in M : f(x_*) = x_*$

Kompaktheit

Eine Teilmenge eines endlichdim. norm. Vektorraum ist nach Bolzano-Weierstraß kompakt gdw. sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Homöomorphismus

Seien K, N metrische Räume, K kompakt, $A \subseteq K$ abgeschlossen, $f : K \to N$ stetig. Dann gilt:
$f(A)$ ist in N kompakt.
f injektiv $\Rightarrow f^{-1} : f(K) \to K$ stetig
f bijektiv $\Rightarrow f$ ist homömorph, d.h. bijektiv, stetig und hat stetige Umkehrabbildung.

Satz vom Maximum

Sei K komp. metr. Raum, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, dann:
$\exists x_\pm \in K : f(x_+) = \max_{x \in K} f(x) \wedge f(x_-) = \min_{x \in K} f(x)$

Wegzusammenhang

Metr. Raum M ist wegzusammenhängend gdw.:
$\forall x, y \in M \exists w \in C([0,1], M) : w(0) = x \wedge w(1) = y$

Zwischenwertsatz

Sei M, N metr. Räume, M wegzusammenhängend und $f \in C(M,N)$. Dann ist $f(M)$ wegzusammenhängend. Für $N = \mathbb{R}$ ist $f(M)$ ein Intervall.

Differentialrechnung in VRäumen

Kurventangente

Sei J ein Intervall. Ein Weg ist stetige Abbildung $f = (f_1 \dots f_m)^T : J \to \mathbb{R}^m$. Das Bild $\Gamma = f(J)$ heißt Kurve. f ist Parametrisierung von Γ.
Die Ableitung eines C^1-Wegs f in $t_0 \in J$ ist def.:

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0)) = \begin{pmatrix} f_1'(t_0) \\ \vdots \\ f_m'(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Für $f'(t_0) \neq 0$ ist Tangente $T(\mathbb{R})$ an $f(t_0)$ durch $T(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0)$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Partielle Ableitungen

$$\partial_j f(x) = \partial_{x_j} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + t e_j) - f(x))$$

Die Ableitung

Seien V, W endlichdim. norm. VRäume, $D \subseteq V$ offen, $f : D \to W$, $x_0 \in D$, $r > 0$ mit $B_V(x_0, r) \subseteq D$ und betrachte $h \in V$ mit $0 < \|h\|_V < r$. f heißt differenzierbar in x_0, wenn $\exists A \in L(V,W)$ so, dass:

$$\lim_{\|h\|_V \to 0} \frac{1}{\|h\|_V} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|_W = 0$$

$f'(x_0) := A$ ist Ableitung von f bei x_0. Wenn $\forall x_0 \in D : f$ differenzierbar, dann ist f diffbar auf D und $f' : D \to L(V,W)$ ist Ableitung von f.

Jacobimatrix

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^k$, $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, l\}$ und $f = (f_1 \dots f_m)^T$, dann:

$$\partial f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_l f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_k(x) & \dots & \partial_l f_k(x) \end{pmatrix}$$

Gradient

Wenn $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ bei $x \in D$ differenzierbar ist, dann:

$$\nabla f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_m f(x) \end{pmatrix} = f'(x)^T \in \mathbb{R}^m$$

Identifiziert kritische Stellen mit $\nabla f(x) = 0$.

Richtungsableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, dann ist Ableitung von f bei x in Richtung v:
$\partial_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x))$
Insofern Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert. Weiterhin gilt: $\partial_v f(x) = (\nabla f(x) | v)$ für $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.

Hessematrix

Wenn $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^n(D, \mathbb{R})$, dann $\nabla f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ und somit:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x) & \dots & \partial_m \partial_1 f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \partial_m f(x) & \dots & \partial_m \partial_m f(x) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist nach dem Theorem von Schwarz, welches ebendies besagt, symmetrisch. Laplaceop. $\Delta f(x) = \partial_{11} f(x) + \dots + \partial_{mm} f(x)$ ist Spur.

Taylor in mehreren Dimensionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, $f \in C^{n+1}(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, $r > 0$ mit $\overline{B}(x,r) \subseteq D$ und $h \in \mathbb{R}^l$ mit $|h|_2 < r$, dann:
$T_{n,x} f(x + h) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_j = 1}^{l} h_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot h_{\alpha_j} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_j} f)(x)$
Dies bedeutet insbesondere für $n = 2$:
$f(x + h) = f(x) + (\nabla f(x) | h) + \frac{1}{2}(\nabla^2 f(x) h | h) + O(|h|_2^3)$

Restglied

$R_{n,x} f(x + h) = f(x + h) - T_{n,x} f(x + h)$

Definitheit

Sei $A \in L(\mathbb{R}^m)$ symmetrisch, dann ist A:

positiv definit	$\forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} : (Av|v) > 0$
negativ definit	$\forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} : (Av|v) > 0$
positiv semidefinit	$\forall v \in \mathbb{R}^m : (Av|v) \geq 0$
negativ semidefinit	$\forall v \in \mathbb{R}^m : (Av|v) \leq 0$

Definitheit von 2×2 Hessematrizen

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine symmetrische Matrix:

(a) positiv definit $\Leftrightarrow a > 0, ad > b^2$

(b) negativ definit $\Leftrightarrow a < 0, ad > b^2$

(c) positiv semidefinit $\Leftrightarrow a \geq 0, d \geq 0, ad \geq b^2$

(d) negativ semidefinit $\Leftrightarrow a \leq 0, d \leq 0, ad \geq b^2$

(e) indefinit $\Leftrightarrow ad < b^2$

Definitheit über Eigenwerte

(a) positiv definit $\Leftrightarrow \forall \lambda \in Spec(A) : \lambda > 0$

(b) negativ definit $\Leftrightarrow \forall \lambda \in Spec(A) : \lambda < 0$

(c) positiv semidefinit $\Leftrightarrow \forall \lambda \in Spec(A) : \lambda \geq 0$

(d) negativ semidefinit $\Leftrightarrow \forall \lambda \in Spec(A) : \lambda \leq 0$

Extremstellen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, dann:

Maximum	$\nabla^2 f(x)$ negativ semidefinit
Minimum	$\nabla^2 f(x)$ positiv semidefinit

Wenn $\nabla f(x) = 0$:

Maximum (strikt)	$\nabla^2 f(x)$ negativ definit
Minimum (strikt)	$\nabla^2 f(x)$ positiv definit

Umkehrsatz

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in D$, $y_0 = f(x_0)$, $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^m$ bijektiv, dann:
$\exists U \subseteq D$ offen , $V \subseteq \mathbb{R}^m : x_0 \in U, y_0 \in V, f_U : U \to V$ bijektiv , $V \subseteq f(D), (f_U)^{-1} \in C^1(V,U), \forall x \in U :$ $f'(x)$ invertierbar. Insbesondere:
$\forall y = f(x) \in V : (f_U^{-1})'(y) = f'(f_U^{-1}(y))^{-1} = f'(x)^{-1}$

Diffeomorphismen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $\tilde{D} = f(D)$, f injektiv, $\forall x \in D : f'(x)$ invertierbar. Dann ist $\tilde{D}$ offen und $f : D \to \tilde{D}$ ein Diffeomorphismus, d.h. D, $\tilde{D}$ offen, f bijektiv und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $f^{-1} \in C^1(\tilde{D}, \mathbb{R}^m)$

Polarkoordinaten

$$\phi : D = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Satz über implizit definierte Funktionen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^k)$, $(x_0, y_0) \in D$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $(\partial_y f)(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^k)$ bijektiv. Dann $\exists$ offene $U_x \subseteq \mathbb{R}^m, U_y \subseteq \mathbb{R}^k$ sowie Abbildung $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$ mit:

(a) $(x_0, y_0) \in U_x \times U_y \subseteq D$, $\varphi(U_x) \subseteq U_y$, $\varphi(x_0) = y_0$, $\forall (x,y) \in U_x \times U_y : \partial_y f(x,y) \in L(\mathbb{R}^k)$ bijektiv

(b) $(x,y) \in U_x \times U_y \wedge f(x,y) = 0$
$\Leftrightarrow x \in U_x \wedge y = \varphi(x)$

(c) $\varphi'(x) = -[(\partial_y f)(x, \varphi(x))]^{-1} (\partial_x f)(x, \varphi(x))$

Insbesondere auch $\forall x \in U_x : f(x, \varphi(x)) = 0$

C^1-Flächen

$M \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eingebettete C^1-Fläche, wenn $\forall p \in M \exists$ offene $V, U \subseteq \mathbb{R}^3 : p \in V \wedge \psi : V \to U$ so, dass $\psi(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$. ψ heißt dann Karte.

Charakterisierung

(a) M ist C^1-Fläche

(b) $\forall p \in M \exists$ offenes $D \subseteq \mathbb{R}^3 \wedge g \in C^1(D, \mathbb{R})$: $p \in D \wedge \forall w \in D : \nabla g(w) \neq 0 \wedge M \cap D = \{w \in D | g(w) = 0\}$ (lokale Nullstellenmenge)

(c) $\forall p \in M \exists i < j \in \{1,2,3\}$, offene $U_1 \subseteq \mathbb{R}^1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2, h \in C^1(U_2, U_1) : p_k \in U_1, (p_i, p_j) \in U_2$ mit $\{k\} = \{1,2,3\} \setminus \{j, j\}$, $h(U_2) \subseteq U_1$ und für $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 | (x_i, x_j) \in U_2, x_k \in U_1\}$ gilt $M \cap Z = \{x \in \mathbb{R}^3 | (x_i, x_j) \in U_2, x_k = h(x_i, x_j)\}$ (lokaler Graph)

(d) $\forall p \in M \exists$ offenes $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2, W \subseteq \mathbb{R}^3, F \in C^1(U_0, \mathbb{R}^3) : p \in W, \forall (s,t) \in U_0 : Rg(F'(s,t)) = 2$ und $F : U_0 \to M \cap W$ bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung. (lokale Parameterisierung)

Tangentialraum

Tangentialraum an m bei $p = F(u_0)$ wobei F lokale Parametrisierung:

$$T_p M = F'(u_0)(\mathbb{R}^2) = \left\{ F'(u_0) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Normalenraum

Normalenraum an M bei p und $g(p) = 0$ wobei g lokale Nullstellenmenge:
$N_p M = lin\{\nabla g(p)\} = \{t \nabla g(p) | t \in \mathbb{R}\}$

Lagrange

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}$ und $g \in C^1(D, \mathbb{R}^k)$ mit $1 \leq k \leq l$. Setze $M = \{z \in D | g(z) = 0\}$. f besitze auf M ein Extremum bei $z_0 \in M$ und $g'(z_0)$ habe Rang k. Dann existieren Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ so, dass:
$\nabla f(z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(z_0) + \ldots + \lambda_k \nabla g_k(z_0)$
Ferner gilt $g_1(z_0) = 0, \ldots, g_k(z_0) = 0$.

Kurvenintegrale

Sei $\gamma \in C([a,b], \mathbb{R}^m)$ ein Weg und $\Gamma = \gamma([a,b])$ die dazugehörige Kurve. Die Länge von Γ wird durch Polygonzüge approximiert. Sei dazu $a \leq b$ und $\mathcal{Z}(a,b)$ die Menge aller Zerlegungen $Z = \{a = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = b\}$. Für $Z \in \mathcal{Z}$ wird gesetzt:
$l(\gamma, Z) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|_2$

Rektifizierbarkeit

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ ist rektifizierbar, wenn:
$l_{[a,b]}(\gamma) = \|\gamma\|_{BV} := \sup_{Z \in \mathcal{Z}} l(\gamma, Z) < \infty$
$l(\gamma)$ ist dann die Länge von γ.

Wegintegral

Sei $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^m)$, dann ist γ rektifizierbar mit:
$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_2 dt$

Kurvenintegrale und Potentiale

Sei $\gamma \in C([a,b], \mathbb{R}^m)$ stückweise C^1, $\Gamma = \gamma([a,b])$.

Kurvenintegral erster Art

Sei reelles $f \in C(\Gamma, \mathbb{R})$ gegeben:

$$\int_\Gamma f d\gamma = \int_\Gamma f(x) d\gamma := \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)|_2 dt$$

Kurvenintegral zweiter Art

Sei vektorwertiges $F \in C(\Gamma, \mathbb{R}^m)$ gegeben:

$$\int_\Gamma F \cdot dx = \int_\Gamma F(x) \cdot dx := \int_a^b (F(\gamma(t)) | \gamma'(t)) dt$$

Wegunabhängigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, dann ist $F \in C(D, \mathbb{R}^m)$ wegunabhängig auf D, wenn für alle stückweisen C^1-Kurven $\gamma_1, \gamma_2 \in C([a,b], \mathbb{R}^m)$ in D mit gleichem Anfangs- und Endpunkt gilt:

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dx = \int_{\Gamma_2} F \cdot dx$$

Ein $\phi \in C^1(D, \mathbb{R})$ heißt Potential von F auf D, wenn $\nabla \phi = F$ auf D. F ist dann Gradientenfeld.
Weiterhin ist F wegunabhängig auf D gdw. F ein Potential ϕ auf D hat.
Ferner gilt dann: $\int_\Gamma F \cdot dx = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$

Poincaré

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und sternförmig und $F \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ sei rektifizierbar. Dann hat F ein Potential auf D, insbesondere auch auf jeder Kugel $B(x_0, r) \subseteq D$.

Gewöhnliche Differentialgleichung

Lokale Lipschitzstetigkeit

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ und J ein Intervall. $g : J \times M \to \mathbb{R}^k$ ist lokal Lipschitz in x, wenn:
$\forall (t_0, x_0) \in J \times M \exists \delta = \delta(t_0, x_0) > 0, r = r(t_0, x_0) > 0, L = L(t_0, x_0) \geq 0 \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap J \forall x, y \in \overline{B}(x_0, r) \cap M : |g(t,x) - g(t,y)|_2 \leq L|x - y|_2$.

f Lipschitz $\Rightarrow f$ lokal Lipschitz $\Rightarrow f$ stetig.
f stetig differenzierbar $\Rightarrow f$ lokal Lipschitz.
Ein diff. f ist Lipschitz gdw. $\partial_x^{(1)} f$ beschränkt ist.

Anfangswertprobleme

Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in J$ mit $t_0 < \sup J$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ und $u_0 \in D$.

$$u'(t) = f(t, u(t)), t \geq t_0, t \in J$$
$$u(t_0) = u_0$$

Für das Anfangswertproblem wird ein $t_1 \in J$ mit $t_1 > t_0$ und eine eindeutige Lösung $u \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ auf $[t_0, t_1]$ gesucht.

Lokale Lipschitzstetigkeit im Kontext

Sei $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^k)$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, J ein Intervall und es existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j} f \in C(J \times D, \mathbb{R}^k)$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$.
Dann ist f lokal Lipschitz in x.

Picard-Lindelöf (lokal)

Seien J ein Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x, $u_0 \in D$, $t_0 \in J$ mit $t_0 < \sup J$. Dann gelten:

(a) $\exists t_1 = t_1(u_0) > t_0$ mit $t_1 \in J$ und eine eindeutige Lösung u auf $[t_0, t_1]$ von $u'(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$

(b) $u'(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ besitze zwei Lösungen v_1 und v_2 auf Intervallen $[t_0, T_1] \subseteq J$ bzw. $[t_0, T_2] \subseteq J$. Dann stimmen v_1 und v_2 auf $[t_0, T_3]$ mit $T_3 = \min\{T_1, T_2\}$ überein.

Picard-Lindelöf (maximal)

Unter den Voraussetzungen von Picard-Lindelöf (lokal) sei $u_0 \in D$, dann gilt weiterhin:

(a) $\exists$ maximale Existenzzeit $\bar{t}(u_0) \in (t_0, \sup J]$ und eine eindeutige maximale Lösung u von $u'(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ auf $[t_0, \bar{t}(u_0))$

(b) Wenn $\bar{t}(u_0) < \sup J$, dann $\exists t_n \in (t_0, \bar{t}(u_0))$ mit $\lim_{n \to \infty} t_n = \bar{t}(u_0)$ so, dass die Blow-Up Bedingung erfüllt ist: $\lim_{n \to \infty} |u(t_n)|_n = \infty$ oder $\lim_{n \to \infty} \inf_{x \in \partial D} |u(t_n) - x|_2 = 0$

Gronwallsche Ungleichung

Sei J ein Intervall, $\varphi \in C(J)$, $\varphi \geq 0$, $t_0 = \min J$ und $a, b \geq 0$ Konstanten mit $\forall t \in J : 0 \leq \varphi(t) \leq a + b \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$. Dann gilt: $\forall t \in J : \varphi(t) \leq a e^{b(t - t_0)}$

Obergrenze des Existenzintervall

Seien $J = [t_0, \infty)$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $M \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen mit $M \subseteq D$, $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ sei lokal Lipschitz in x, u die maximale Lösung von $u'(t) = f(t, u(t))$ auf $[t_0, t(u_0))$ und es gelte $\forall t_0 \leq t \leq \bar{t}(u_0) : u(t) \in M$. Dann gelten:

(a) $\forall b > t_0 \exists c(b) \geq 0 : \forall t \in [t_0, b], x \in M : (f(t,x) | x) \leq c(b)(1 + |x|_2^2) \Rightarrow \bar{t}(u_0) = \infty$

(b) Sei speziell $f : D \to \mathbb{R}^n$ und $\exists c \geq 0$ mit $\forall x \in M : (f(x) | x) \leq c(1 + |x|_2)$, dann $\bar{t}(u_0) = \infty$

Bedingung (a) folgt aus: $\forall b > t_0 \exists \tilde{c}(b) \geq 0$
$\forall t \in [t_0, b], x \in M : |f(t,x)|_2 \leq \tilde{c}(b)(1 + |x|_2)$
Bedingung (b) folgt aus: $\exists \tilde{c} > 0 \forall x \in M$:
$|f(x)|_2 \leq \tilde{c}(1 + |x|_2)$

Formulierung als Problem 1. Ordnung

Jedes Anfangswertproblem k-ter Ordnung lässt sich in ein Problem 1. Ordnung umschreiben.
Beispielsweise: Das Problem 2. Ordnung $u''(t) = h(t) - u(t) + u'(t)^2$ mit $u(0) = u_0$ und $u'(0) = u_1$ sowie $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ wird formuliert als Problem 1. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) = h(t) - u(t) + u'(t)^2 \end{pmatrix}$$

Sei $v_0(t) := u(t)$, $v_1(t) := u'(t)$ und $v(t) := \begin{pmatrix} v_0(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} t \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ h(t) - v_0 + v_1^2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt also:

$$v'(t) = g(t, v(t)) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ h(t) - v_0(t) + v_1(t)^2 \end{pmatrix}$$
$$v(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Trennung der Variablen

Sei $u'(t) = g(t) h(u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ Anfangswertproblem mit $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $h \in C((a,b), \mathbb{R})$, $u_0 \in (a,b)$ und $h(u_0) \neq 0$. u ist Lösung, wenn J Intervall mit $\forall t \in J : u(t) \in (a,b)$, $u \in C^1(J, \mathbb{R})$ und $t_0 \in J$.

$$u \text{ ist Lösung } \Rightarrow \int_{t_0}^t g(s) ds = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{h(x)} dx$$

Dies kann manchmal nach u aufgelöst werden.